أصدقاء الرياضيات
AMIMATHS
موريتانيا

Publications AMIMATHS

avec l'appui du

Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif

Olympiades Nationales de Mathématiques

2017 à 2024

7C

Tome 2

Horma Hamoud - Mahfoudh Mohamed Ammou

Dah Mohamed Boubacar - Isselmou Farajou

Olympiades Nationales de

Mathématiques

2017 à 2024

7ème C

Tome 2

Horma Hamoud Mahfoudh Mohamed Ammou

Dah Mohamed Boubacar Iselmou Farajou

Si vous décelez une erreur, nous vous remercions par avance de nous en faire part :

e-mail : aamimaths@gmail.com

L'équipe Rallyes et Olympiades – AMIMATHS

Sommaire

مقدمة

يسر جمعية أصدقاء الرياضيات أن تضع بين يدي مجتمع المهتمين بالرياضيات في موريتانيا هذا الكتاب ضمن السلسلة الأولى من إصداراتها في مجال مسابقات رالي وأولمبياد الرياضيات الوطني.

الكتاب عبارة عن جمع مواضيع مادة الرياضيات في الأولمبياد الوطني للرياضيات لمستوى السنة السابعة رياضيات من سنة 2017 إلى سنة 2024، مع حلولها التفصيلية بمنهجية تربوية علمية تساهم في تنمية مواهب التلاميذ وتساعدهم في التحضير لهذا النوع من المسابقات وطنيا وإقليميا ودوليا. كما يضع تحت تصرف الأساتذة بنكا من التمارين غير التقليدية، مما يساعد في اكتشاف التلاميذ الموهوبين وتحسين عملية التعليم والتدريب.

تم إصدار هذا الكتاب في ثلاثة أجزاء، يعالج كل جزء منها مواضيع أحد الأدوار الثلاثة للأولمبياد الوطني للرياضيات وذلك لمراعاة التدرج في مستوى صعوبة المسائل.

ويأتي إنتاج ونشر هذا الكتاب ضمن أنشطة جمعية أصدقاء الرياضيات - بالتعاون مع وزارة التهذيب الوطني وإصلاح النظام التعليمي - الرامية إلى الرفع من مكتسبات التلاميذ في مادة الرياضيات، وتحسين جودة التعليم ووفرته وصولا إلى الرفع من نسب النجاح في الامتحانات الوطنية وكذا في المسابقات الإقليمية والدولية؛

كما يأتي ذلك في الوقت الذي يلاحظ فيه عزوف مستمر عن مادة الرياضيات أدى إلى تدهور في أعداد المنتسبين إلى شعبة الرياضيات، الشيء الذي سينتج عنه حتما - حاضرا ومستقبلا - نقص حاد في المهندسين والكوادر العلمية المؤهلة وفي الأساتذة الأكفاء القادرين على تدريس مواد الرياضيات والعلوم الفيزيائية لأجيالنا الصاعدة، مما يؤخر عجلة التنمية والتقدم إذ لا يمكن لأي بلد النهوض بدون الرياضيات لكونها مفتاحا للعلوم الأخرى ووسيلة لاكتسابها وتملكها.

وفي هذا السياق فإن جمعية أصدقاء الرياضيات تشكر جزيلا اللجنة الوطنية للرياضيات والعلوم (برنامج مواهب) على التعاون المثمر والمساهمة في توسيع دائرة الاهتمام بمادة الرياضيات وجعلها مادة جاذبة ومشوقة، كما تثمن عاليا جهود كافة مفتشي وأساتذة الرياضيات الذين ساهموا من قريب أو بعيد في إنجاز هذا العمل، وتعول على ما لديهم من ملاحظات واقتراحات قد تساعد في تنقيح وتحسين جودة هذا الكتاب التجريبي الذي يتم إصداره في بلادنا بهذا الشكل والحجم لأول مرة.

PREFACE

Dans le cadre de la première série de ses publications en matière de compétitions du Rallye et de l'Olympiade Nationale de Mathématiques, l'Association des Amis des Mathématiques (AMIMATHS) est heureuse de mettre cet ouvrage entre les mains de la communauté mathématique de Mauritanie.

Regroupant des sujets de mathématiques des olympiades de 7^{e} année de 2017 à 2024, cet ouvrage propose des solutions détaillées et utilise des méthodologies scientifiques contribuant au développement des talents des élèves tout en les préparant à ce type de compétitions tant au niveau national qu’au niveau régional et international. En outre, ce manuel met à la disposition des enseignants une banque d'exercices non conventionnels leur permettant d’identifier des apprenants doués et contribuant ainsi à améliorer le processus de l'enseignement/apprentissage.

Cet ouvrage est publié en trois tomes, chacun traitant les sujets de l'une des trois phases de l'Olympiade nationale de mathématiques, afin de garantir un niveau de difficulté graduel des problèmes.

La production et la publication de ce livre font partie des activités d’AMIMATHS en coopération avec le Ministère de l’Éducation Nationale et de la Réforme du Système Éducatif visant à rehausser le niveau des acquis des élèves en mathématiques et à améliorer la qualité et l’offre de l’enseignement afin d’augmenter le taux de réussite aux examens nationaux ainsi qu’aux concours régionaux et internationaux.

Cela survient également à un moment où notre pays connait une réticence envers l’enseignement/ apprentissage des mathématiques, réticence qui a conduit à une diminution grave du nombre d’élèves inscrits en série mathématiques. Cette situation déplorable entraînera, sans doute, dans le présent et le futur, un manque criant d’ingénieurs, de personnel scientifique qualifié et de professeurs compétents capables d'enseigner les mathématiques et les sciences physiques à nos prochaines générations. Ce qui retarde la roue du développement et du progrès de notre pays. En effet, aucun pays ne peut progresser sans les mathématiques qui sont la clé des autres sciences et un moyen de leur acquisition.

Dans ce contexte, l'Association AMIMATHS remercie vivement la commission Nationale pour les Mathématiques et les Sciences (Programme Mawaheb) pour sa coopération fructueuse et sa contribution à l'élargissement du cercle d'intérêt pour les mathématiques. Cet intérêt en a fait une matière attractive et passionnante. L'Association remercie également tous les inspecteurs et professeurs de mathématiques qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail. Elle compte également sur les commentaires et suggestions pour contribuer à améliorer la qualité de cet ouvrage expérimental, qui est édité, dans cette ampleur et ce format, pour la première fois dans notre pays.

ENONCES DES SUJETS

du deuxième tour des olympiades nationales de

Mathématiques de 2017 à 2024

Niveau 7$^{\text{ème}}$ Mathématiques

Sujet 1 $2^{ème}$ tour Session 2024

Exercice 1 (20 points)

Soit ABCD un carré direct. On construit les points P et Q tels que $P \in [AB]$, $Q \in [BC]$ et $BP = BQ$. Soit H le projeté orthogonal de B sur (PC). Montrer que $(QH) \perp (HD)$

Exercice 2 (20 points)

Notons $A = 4444^{4444}$, B la somme des chiffres de l'écriture décimale de A, C la somme des chiffres de l'écriture décimale de B, et D la somme des chiffres de l'écriture décimale de C. Déterminer D.

Exercice 3 (20 points)

Soient a, b et c trois réels strictement positifs tels que $abc = 1$. Montrer que

$$(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(b^5 + b^4 + b^3 + b^2 + b + 1)(c^5 + c^4 + c^3 + c^2 + c + 1) \geq 8(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)$$

Exercice 4 (20 points)

Pour tout entier naturel n, on note $U_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{\frac{5}{4} - \cos x} dx$

1° Sachant que $U_0 = \frac{4\pi}{3}$**, montrer que** $U_1 = \frac{2\pi}{3}$ **.**

2° a) Montrer que : $U_n + U_{n+2} = \frac{5}{2} U_{n+1}$ **.**

b) Montrer que pour tout n : $U_n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ **.**

c) Calculer, en fonction de n, la somme

$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ **.**

Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$ **.**

Exercice 5 (20 points)

Soit ABC un triangle rectangle en C et G son centre de gravité. Soit P un point de la droite (AG) **tel que** $\widehat{CPA} = \widehat{CAB}$ **et Q un point de** (BG) **tel que** $\widehat{CQB} = \widehat{ABC}$**.**

Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQG et BPG se recoupent en un point de la droite (AB)**.**

Sujet 2 $2^{ème}$ tour Session 2023

Exercice 1 (25 points)

Soit ABCD un quadrilatère inscrit dans un cercle Γ. La parallèle à (BC) passant par D coupe (AC) en P, (AB) en Q et recoupe Γ en R. La parallèle à (AB) passant par D coupe (AC) en S, (BC) en T et recoupe Γ en U.

1. Faire une figure soignée

2. Montrer que les triangles ABC, AQP et STC sont semblables

3. Montrer que $\frac{ST}{TU} = \frac{QR}{PQ}$

Exercice 2 (25 points)

Soit a, b et c trois réels strictement positifs tels que $abc = 1$.

1. a) Justifier que $a^5 + b^5 = (a+b)\left[a^2b^2 + (a-b)(a^3 - b^3)\right]$

b) En déduire que $a^5 + b^5 \geq (a+b)a^2b^2$

2. Montrer que $\frac{ab}{ab + a^5 + b^5} + \frac{bc}{bc + b^5 + c^5} + \frac{ca}{ca + c^5 + a^5} \leq 1$

Exercice 3 (25 points)

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $2 + x \geq 3\sqrt[3]{x}$

2. Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, un polynôme à coefficients réels positifs, tels que $a_n = a_0 = 1$. On suppose que P admet n racines réelles.

a) Montrer que toutes les racines de P sont négatives

b) Démontrer que $P(2) \geq 3^n$.

Exercice 4 (25 points)

A. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.

Montrer la relation : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(a+b-t)dt \ (1)$.

B. On cherche à calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ par deux méthodes différentes.

1. Méthode 1 :

a) En posant $x = \tan t$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, montrer que

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)dt$.

b) En utilisant (1) montrer que : $2I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dt$ puis déterminer I.

2.Méthode 2 :

a) En posant $x=\frac{1-t}{1+t}$ pour $t\in[0,1]$, montrer que :

$$2I=\int_0^1\frac{\ln 2}{1+t^2}dt.$$

b) Calculer $\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$ puis retrouver I.

Sujet 3 $2^{ème}$ tour Session 2022

Exercice 1: (25 points)

Soient x, y et z trois réels non nuls tels que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

a) Monter que : $(xy)^3+(zy)^3+(xz)^3=3(xyz)^2$

b) En déduire que : $\frac{x+y}{z}+\frac{z+x}{y}+\frac{y+z}{x}=-3$

Exercice 2 : (25 points)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 1+23+23^2+...+23^{n-1}$.

1° Vérifier que : $S_{2022}-23\times S_{2021}=1$ en déduire que 23 et S_{2022} sont premiers entre eux.

2° Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $22S_n = 23^n - 1$.

3° a) Vérifier que : $23^{2022} \equiv 1 \left[S_{2022}\right]$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $23x \equiv 1\left[S_{2022}\right]$

4° On admet que 2017 est premier.

a) Démontrer que si n est un nombre premier distinct de 2 et 11 alors n divise $S_n - 1$.

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de S_{2022} par 2017.

<u>Exercice</u> 3 : (25 points)

Soit ABC un triangle et D un point du segment $[BC]$ distinct de B et C.

1° Montre que $BD \times AC^2 + DC \times AB^2 = BC \times \left(AD^2 + BD \times DC\right)$

2° On suppose que le triangle ABC est équilatéral de côté 10cm et que $AD \in \mathbb{N}$ déterminer alors les distances BD et CD.

<u>Exercice</u> 4: (25 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$.

On note α l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$.

1) Soit la suite $\left(x_n\right)$ définie par $x_0 = \frac{3}{4}$ et $x_{n+1} = 1 - x_n^3$.

Déterminer le comportement de cette suite et l'interpréter graphiquement.

2) Soit la suite $\left(y_n\right)$ définie par $y_0 = 1$ et $y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$

Montrer par récurrence que la suite $\left(y_n\right)$ est décroissante et minorée par α .

En déduire qu'elle converge vers α.

Sujet 4 $2^{ème}$ tour Session 2021

Exercice 1: (25 points)

Soit n un entier naturel, $n \geq 1$. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1.a) Déterminer les solutions de l'équation $z^n = 1$.

b) Calculer le produit des solutions de l'équation précédente.

2.a) Soit $p \geq 0$. Calculer la somme $S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.

b) On pose $S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n$. Montrer que $S_2 = 2n$.

Exercice 2: (25 points)

Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers tels que $\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$

1) Calculer a_6, b_6 et le $\text{pgcd}(a_6, b_6)$.

2.a) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

b) Montrer que, pour tout entier n non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 3: (25 points)

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et Γ un cercle dont le centre L est situé sur le segment $[BC]$. On suppose que le cercle Γ est tangent à (AB) en B' et à (AC) en C'. On suppose aussi que le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est situé sur le petit arc $B'C'$ du cercle Γ. Soit x, y et z les mesures en degré respectivement des angles géométriques $\widehat{COB}$, $\widehat{C'OB'}$ et $\widehat{CAB}$; $x,y,z \in [0,180]$.

1.a) Justifier que $x < y$.

b) Montrer que $2y - z = 180°$ puis en déduire que $z < 60°$.

2) Montrer que le cercle Γ coupe le cercle circonscrit au triangle ABC en deux points.

Exercice 4: (25 points)

1) Soit x, y et z des nombres réels strictement positifs. Montrer que :

a) $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

b) $\dfrac{1}{(2x+y+z)^2} \leq \dfrac{1}{4(x+y)(x+z)}$.

2) Soit a, b et c des nombres réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = a+b+c$.

Montrer que : $\dfrac{1}{(2a+b+c)^2}+\dfrac{1}{(2b+c+a)^2}+\dfrac{1}{(2c+a+b)^2} \leq \dfrac{3}{16}$.

Sujet 5 **$2^{ème}$ tour** **Session 2020**

Exercice 1

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_{n,k} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^k\right)^n}$

1.a) Calculer $I_{0,k}$; $I_{n,1}$ et $I_{1,2}$.

b) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait : $\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$ puis en déduire la valeur de $I_{1,3}$.

2) Pour $k \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_{n,k} = \int_0^1 \frac{x^k}{\left(1+x^k\right)^n} dx$.

a) Etablir une relation entre $J_{n,k}$; $I_{n,k}$ et $I_{n-1,k}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$J_{n,k} = \frac{1}{k(n-1)2^{n-1}} + \frac{1}{k(n-k)} I_{n-1,k}$$

c) En déduire une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-1,k}$ pour tout $n \geq 2$.

d) En déduire $I_{3,2}$.

Exercice 2

Dans le plan, on donne n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$. On se propose d'étudier l'existence de n points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ tels que A_1

soit le milieu de $[M_1,M_2]$, A_2 soit le milieu de $[M_2,M_3]$..., A_{n-1} soit le milieu de $[M_{n-1},M_n]$ et A_n soit le milieu de $[M_n,M_1]$. On note z_k, a_k les l'affixes respectives des points M_k et A_k.

1) On suppose l'existence d'une solution du problème.

a) Justifier que : $\forall k \in \{1,2,...,n-1\}$, $z_k + z_{k+1} = 2a_k$ **et**

$z_n + z_1 = 2a_n$

b) Montrer que :

$$\left(1-(-1)^n\right)z_1 = 2a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - 2a_{n-3} + ... + 2(-1)^{n-1}a_1$$

2) Discuter selon la parité de n l'existence d'une solution du problème.

Exercice 3

Soit $A(z) = (z+1)^{2n} - 1$, **où** $z \in \mathbb{C}$ **et** $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a) Montrer qu'il existe un polynôme B tel que $A(z) = z \times B(z)$

.

b) Soit $B(z) = b_{2n-1}z^{2n-1} + b_{2n-2}z^{2n-2} + ... + b_1 z + b_0$, **quelle est la valeur de** b_0 **?**

c) Déterminer, sous forme trigonométrique, les racines de A dans $\mathbb{C}$. **On posera** $z_0, z_1, z_2, ..., z_{2n-1}$ **avec** $z_0 = 0$.

2.a) On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n}$. Montrer à l'aide d'un changement d'indice, que $P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{2n}$.

b) En déduire que, si $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{2n}$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.

c) Calculer de deux façons $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. Puis en déduire Q_n et enfin P_n.

Exercice 4

Soient a, b et c des réels. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $\det M = 2abc(a+b+c)^3$

2) Discuter suivant a, b et c les solutions du système :

$$\begin{cases} (b+c)^2 x + b^2 y + c^2 z = 1 \\ a^2 x + (c+a)^2 y + c^2 z = 1 \\ a^2 x + b^2 y + (a+b)^2 z = 1 \end{cases}$$

Exercice 5

On se propose de déterminer une fonction de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui vérifie les deux conditions : $f(1) = 1$ et pour tous les entiers naturels m et, $f(m+n) = f(n) \times f(m) + f(n) + f(m)$.

1) On suppose qu'une telle fonction f existe.

a) Calculer $f(0)$ (on pourra poser $n = 0$ et $m = 1$).

b) Calculer $f(2)$, $f(3)$ et $f(6)$.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, $f(n+1) = 2f(n) + 1$.

3) On pose pour tout entier naturel n, $g(n) = f(n) + 1$.

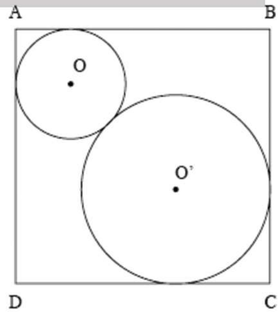
Montrer que, pour tous entiers naturels m et n,
$g(n+m) = g(n) \times g(m)$.

4) Donner une fonction f qui répond au problème.

.

Sujet 6 $2^{ème}$ tour Session 2019

Exercice 1: (20 points)



Soit $ABCD$ un carré de coté a. Un cercle $\Gamma(O,r)$ intérieur au carré est tangent à (AB) et (AD). Un second cercle $\Gamma'(O',r')$, intérieur au carré, est tangent extérieurement à Γ ainsi qu'aux droites (CB) et (CD). Soit S la somme des aires des cercles Γ et Γ'.

1° Exprimer $r+r'$ en fonction de a.

2° Quelles sont les valeurs maximale et minimale de S ?

Exercice 2: (20 points)

On se propose de déterminer tous les entiers n pour lesquels $\sqrt{n+12\sqrt{5}}-\sqrt{n-12\sqrt{5}}$ est un entier.

Si tel est le cas on pose $k=\sqrt{n+12\sqrt{5}}-\sqrt{n-12\sqrt{5}}$.

1° Montrer que $4k^2n=k^4+5\times 24^2$.

2° En déduire qu'il existe un entier m tel que $km=24$.

3° Montrer que k est un entier pair.

4° En déduire les valeurs de n pour lesquelles $\sqrt{n+12\sqrt{5}}-\sqrt{n-12\sqrt{5}}$ est un entier.

Exercice 3 : (20 points)

Soit n un nombre naturel. Notons P_n la propriété : « n^2-1 est multiple de 12 ».

1° Montrer que P_n est vraie si n est un nombre premier autre que 2 ou 3.

2° Donner un exemple de nombre composé (c'est-à-dire non premier) n pour lequel P_n est vraie et un autre pour lequel P_n est fausse.

3° Si n est composé, à quelle condition sur n la propriété P_n est-elle vraie ?

Exercice 4 : (20 points)

Soit p et q deux nombres rationnels strictement positifs. Pour tout $x\in[0;1[$, on pose, $f_{p\,;\,q}(x)=\int_0^x t^p(1-t)^q\,dt$.

1° a) Montrer que $(1+p)f_{p\,;\,q}(x)-qf_{p+1\,;\,q-1}(x)=x^{p+1}(1-x)^q$

b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt=\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

2° a) Montrer que :

$$(p+q)(1+p+q)f_{p\,;\,q}(x)-pqf_{p-1\,;\,q-1}(x)=x^p(1-x)^q\left((p+q)x-q\right)$$

b) En déduire la valeur de $F_n(x)=\int_0^x\sqrt[3]{\dfrac{t^n}{(1-t)^{n+3}}}\,dt$

Exercice 5 : (20 points)

Soit ABC un triangle dont les longueurs des côtés sont toutes différentes : $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. On note Δ_a la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$ et δ_a sa bissectrice extérieure.

1° I_a et J_a sont les points d'intersection de (BC) respectivement avec Δ_a et δ_a.

a) Calculer de deux manières différentes les aires des triangles ABI_a et ACI_a.

b) En déduire que : $I_a = \text{bar}\{(B,b);(C,c)\}$. Montrer aussi que : $J_a = \text{bar}\{(B,-b);(C,c)\}$.

2° Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Montrer que : $I = \text{bar}\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$.

3° Soit D le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, N un point du segment $[AB]$ et P le point du segment $[BC]$ tels que : $AN = CP$. Les droites (AP) et (CN) se coupent en Q. Montrer que la droite (DQ) est bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$.

Sujet 7 **$2^{ème}$ tour** **Session 2018**

<u>Exercice 1 :</u> (20 points)

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	18							

Une ligne est désignée par le nombre écrit dans sa première case à gauche.

Une colonne est désignée par le nombre écrit dans sa case la plus haute.

Un nombre est repéré par la ligne et la colonne dans lesquelles il se trouve. Par exemple le nombre 11 est repéré par (10, 5) , le nombre 8 par (5, 4).

1) Comment est repéré le nombre 42 ?

2) Comment est repéré le nombre 2018 ?

3) Quel est le nombre qui est sous 2018 ?

<u>Exercice 2 :</u> (20 points)

On voudrait recouvrir la surface d'un carré ABCD de côté 10 cm avec des disques identiques, de rayon 5 cm.

1) Soit M le point de la diagonale [AC] situé à 10 cm de A, et soit C_1 le cercle de diamètre [AM]. Le cercle C_1 recoupe le côté [AD] en P et le côté [AB] en Q. Soit T le point du côté [CD] situé à 10 cm du point P, et soit C_2 le cercle de diamètre [TP]. Soit U le point du côté [BC] situé à 10 cm du point Q, et soit C_3 le cercle de diamètre [UQ].

a) Faire une figure et calculer DT .

b) On appelle X le point d'intersection de la parallèle à (CD) passant par U et de la parallèle à (BC) passant par T. Prouver que les points M et X sont à l'intérieur de C_2.

c) On dit qu'un cercle recouvre un point lorsque ce point est sur le cercle ou à l'intérieur du cercle. Prouver qu'à eux trois, les cercles C_1, C_2 et C_3 recouvrent plus de 99,75% de la surface du carré ABCD.

2) Prouver qu'il est impossible de recouvrir toute la surface du carré ABCD avec trois disques Γ_1, Γ_2 et Γ_3, chacun de rayon 5 cm.

Exercice 3 ; (20 points)

Soit (U_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 15; \quad U_1 = 57 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note V_n le reste de la division euclidienne de U_n par 9.

1) Calculer $V_0, V_1, ..., V_9$.

2) Justifier que la suite (V_n) est périodique. Déterminer sa période.

3) Trouver le plus grand entier k tel que $3^k \mid U_{2018}$.

Exercice 4 : (20 points)

Trouver tous les nombres réels x, y, z vérifiant : $\begin{cases} (x+1)yz = 12 \\ (y+1)zx = 4 \\ (z+1)xy = 4 \end{cases}$

Exercice 5 : (20 points)

Calculer $f(2;1)$ et $f(2;2)$ où f est la fonction qui à tout couple d'entiers naturels $(x;y)$ associe l'entier naturel $f(x;y)$ tel que :

$f(0;y) = y + 1$, $f(x;\ 0) = f(x-1;1)$, $f(x+1;y+1) = f(x;f(x+1;y))$

Sujet 8 $\quad$ 2ème tour $\quad$ Session 2017

Exercice 1 (4 points)

On définit pour chaque couple de réels (a,b) la fonction f par :

$$f(x) = a - \sqrt{x+b}$$

Deux nombres réels u et v distincts sont dits échangeables s'il existe au moins un couple de réels (a,b) tels que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$.

1) Montrer que 2 et 3 sont échangeables.

2) Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?

3) A quelle condition deux entiers n et m sont-ils échangeables ?

Exercice 2 (4 points)

Dans un livre, les pages sont numérotées de 1 à n, et de gauche à droite. La page numérotée 1 est une page de gauche. On additionne les numéros de toutes les pages et on trouve un total égal à 2017. Mais une feuille du livre a été perdue et les numéros des ses pages n'ont pas été comptés.

Quel est le nombre de pages du livre et les numéros des pages de la feuille perdue ?

Exercice 3 (4 points)

Soit ABC un triangle direct. On considère les points P, Q et R tels que : $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$. On note I le point d'intersection de (AP) et (CR), J le point d'intersection de (AP) et (BQ) et K celui de (BQ) et (CR).

1.a) Exprimer I , J et K comme barycentre de A, B et C.

b) Montrer que : I est le milieu de $[CK]$, J est le milieu de $[AI]$ et K est le milieu de $[BJ]$

2.a) Montrer qu'une médiane partage le triangle en deux triangles de même aire.

b) Exprimer l'aire de IJK en fonction de l'aire de ABC.

Exercice 4 (4 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ et soit (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° Calculer les dérivées première, seconde et troisième de f.

2° Détermine l'expression de la dérivée $f^{(n)}$ d'ordre n en fonction de n.

Exercice 5 (4 points)

On donne un cercle de centre O et deux diamètres perpendiculaires $[AB]$ et $[CD]$. M étant un point du segment $[AB]$, on trace (CM), qui recoupe le cercle en N. La tangente en N au cercle et la perpendiculaire en M à (AB) se coupent en P.

Montrer que $OP = CM$.

CORRIGE DES SUJETS

du deuxième tour des olympiades nationales de Mathématiques de 2017 à 2024

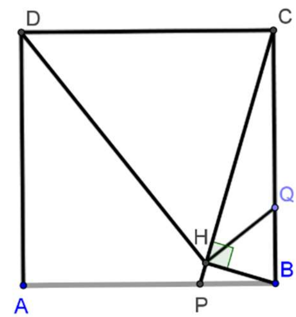
Niveau 7ème Mathématiques

Corrigé du Sujet 1 $\qquad$ 2ème tour 2024

Exercice 1 (20 points)

Soit ABCD un carré direct. On construit les points P et Q tels que $P \in [AB]$, $Q \in [BC]$ et $BP = BQ$. Soit H le projeté orthogonal de B sur (PC). Montrer que $(QH) \perp (HD)$

Corrigé



Méthode 1 (Nombres complexes)

On considère le repère orthonormé $\left(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$.

Notons $a = BP = BQ$.

Dans ce repère on a $B(0), C(1), A(i), D(1+i), Q(a), P(ai)$.

Notons z l'affixe de H.

$$(HB)\perp(PC)\Leftrightarrow \frac{z}{ia-1}\in i\mathbb{R}$$

- $$\Leftrightarrow \frac{z}{ia-1}+\overline{\left(\frac{z}{ia-1}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow z(-1-ia)+\overline{z}(-1+ia)=0 \quad (1)$$

- **P, H et C alignés** $\Leftrightarrow$

$$\frac{z-1}{ia-1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \frac{z-1}{ia-1}-\overline{\left(\frac{z-1}{ia-1}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow (z-1)(-1-ia)-(\overline{z}-1)(-1+ia)=0 \quad (2)$$

La somme des égalités (1) et (2) donne

$$(2z-1)(-1-ia)=1-ia \Leftrightarrow 2z=1-\frac{1-ia}{1+ia}=\frac{2ia}{1+ia}\Leftrightarrow z=\frac{ia}{1+ia}=\frac{a}{a-i}$$

Montrer que $(QH)\perp(HD)$ revient à montrer que $\frac{z-a}{z-(1+i)}$ est un imaginaire pur.

Or

$$\frac{z-a}{z-(1+i)}=\frac{\frac{a}{a-i}-a}{\frac{a}{a-i}-1-i}=\frac{a-a^2+ai}{a-(1+i)a+i-1}=\frac{ia(1-i+ia)}{-ia+i-1}=-ia$$

Donc les droites (QH) et (HD) sont perpendiculaires.

<u>Méthode 2</u> (Similitudes directes)

Soit S la similitude directe de centre H telle que $S(P)=B$. Donc l'angle de S est $\frac{\pi}{2}$. $S(B)=S\circ S(P)$ donc il appartient à (PH) en plus l'image de (PB) est la perpendiculaire à (PB) passant par B qui est

(BC) d'où $S(B)$ est à l'intersection des droites (PH) et (BC) d'où $S(B)=C$. Comme PBQ est un triangle rectangle isocèle indirecte en B alors son image est aussi un triangle rectangle isocèle indirecte en $S(B)=C$. Soit $R=S(Q)$, alors BCR est un triangle rectangle isocèle indirecte en C ce qui n'est autre que BCD d'où $S(Q)=D$, ce qui montre que HQD est rectangle en H.

Exercice 2 20 points

Notons $A=4444^{4444}$, B la somme des chiffres de l'écriture décimale de A, C la somme des chiffres de l'écriture décimale de B, et D la somme des chiffres de l'écriture décimale de C. Déterminer D.

Corrigé

$A=4444^{4444}\equiv 7^{4444}[9]$ **or** $7^3\equiv 1[9]$ **et** $4444\equiv 1[3]$ **donc** $A\equiv 7[9]$,

d'autre part on sait que comme $10\equiv 1[9]$ alors l'écriture décimale de tout entier est congrue, modulo 9, à la somme de ses chiffres.

Donc $D\equiv C\equiv B\equiv A[9]\Rightarrow D\equiv 7[9]$.

$A=4444^{4444}\le 10000^{4444}=10^{5\times 4444}\le 10^{25000}$,

donc $B\le 9\times 25000$ **et par conséquent** $C\le 2+9\times 5=47$ **alors** $D\le 4+9=13$.

Or le seul entier compris entre 0 et 13 qui est congru à 7 modulo 9 est 7 d'où $\boxed{D=7}$

Exercice 3 (20 points)

Soient a, b et c trois réels strictement positifs tels que $abc = 1$.

Montrer que

$$(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1)$$
$$\geq 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$

(Pb1 JBMO 2011)

Corrigé

On sait que $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x^2+x+1)(x^3+1)$

donc l'inégalité s'écrit

$$(a^2+a+1)(a^3+1)(b^2+b+1)(b^3+1)(c^2+c+1)(c^3+1)$$
$$\geq 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$

ce qui revient à montrer que $(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)\geq 8$

or d'après l'IAG on a

$$(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)\geq 2\sqrt{a^3\times 1}.2\sqrt{b^3\times 1}.2\sqrt{c^3\times 1}=8\sqrt{(abc)^3}=8$$

L'égalité a lieu lorsque $a=b=c=1$

Exercice 4 (20 points)

Pour tout entier naturel n, on note $U_n=\int_0^\pi \frac{\cos nx}{\frac{5}{4}-\cos x}dx$

1° Sachant que $U_0 = \dfrac{4\pi}{3}$, montrer que $U_1 = \dfrac{2\pi}{3}$.

2° a) Montrer que : $U_n + U_{n+2} = \dfrac{5}{2} U_{n+1}$.

b) Montrer que pour tout n : $U_n = \dfrac{4\pi}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c) Calculer, en fonction de n, la somme

$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Corrigé

1° On a $U_0 = \displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\frac{5}{4} - \cos x}$ et $U_1 = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos x}{\frac{5}{4} - \cos x} dx$ donc

$$\frac{5}{4}U_0 - U_1 = \int_0^\pi \frac{\frac{5}{4} - \cos x}{\frac{5}{4} - \cos x} dx = \int_0^\pi dx = \pi \Rightarrow U_1 = \frac{5}{4}U_0 - \pi = \frac{5\pi}{3} - \pi = \frac{2\pi}{3}$$

2° a)

$$U_n + U_{n+2} = \int_0^\pi \frac{\cos nx}{\frac{5}{4} - \cos x} dx + \int_0^\pi \frac{\cos(n+2)x}{\frac{5}{4} - \cos x} dx = \int_0^\pi \frac{\cos nx + \cos(n+2)x}{\frac{5}{4} - \cos x} dx$$

Or $\cos nx + \cos(n+2)x = 2\cos x\cos(n+1)x$ donc

$$U_n + U_{n+2} = \int_0^{\pi} \frac{2\cos x\cos(n+1)x}{\frac{5}{4} - \cos x} dx = \int_0^{\pi} \frac{2\left(\cos x - \frac{5}{4} + \frac{5}{4}\right)\cos(n+1)x}{\frac{5}{4} - \cos x} dx \Rightarrow$$

$$U_n + U_{n+2} = -2\int_0^{\pi} \cos(n+1)x dx + \frac{5}{2}\int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)x}{\frac{5}{4} - \cos x} dx$$

$$= -2\left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)x\right]_0^{\pi} + \frac{5}{2}U_{n+1} \Rightarrow$$

$$U_n + U_{n+2} = \frac{5}{2}U_{n+1} \text{ car } \left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)x\right]_0^{\pi} = 0$$

b) Montrons par récurrence que pour tout n : $U_n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a $U_0 = \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^0$ **et** $U_1 = \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^1$ **donc la propriété est vraie pour** $n = 0$ **et pour** $n = 1$.

Supposons que pour tout $p \le n+1$, **on a** $U_p = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^p$, **donc**

$U_n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ **et** $U_{n+1} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

D'après 2° a) on a $U_n + U_{n+2} = \frac{5}{2}U_{n+1}$ **donc**

$$U_{n+2} = \frac{5}{2}U_{n+1} - U_n$$

$$= \frac{5}{2} \times \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{5}{2} \times \frac{1}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times \frac{1}{4} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

Conclusion pour tout entier n on a $U_n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

c) La suite (U_n) **est donc une suite géométrique de raison** $q = \frac{1}{2}$ **d'où**

$$S_n = U_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{4\pi}{3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{8\pi}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}.$$

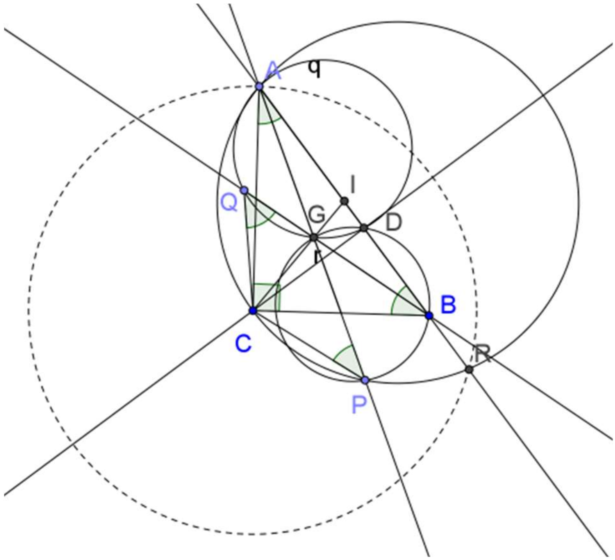
Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ **alors** $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{8\pi}{3}$.

<u>Exercice 5 (20 points)</u>

Soit ABC un triangle rectangle en C et G son centre de gravité.

Soit P un point de la droite (AG) **tel que** $\angle CPA = \angle CAB$ **et Q un point de** (BG) **tel que** $\angle CQB = \angle ABC$**. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQG et BPG se recoupent en un point de la droite** (AB)

Corrigé



Méthode 1

ABC étant rectangle en C alors si I est le milieu de $[AB]$ alors $IA = IB = IC$. Donc le triangle IAC est isocèle en I et $\angle ACI = \angle CAB$.

Puisque $G \in [CI]$ donc $\angle ACG = \angle ACI = \angle CAB = \angle CPA$, ce qui montre que les triangles APC et ACG sont semblables et alors on a $AC^2 = AG \times AP$

Soit D le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC alors les triangles ACD et ABC sont semblables ce qui donne $AC^2 = AD \times AB$.

D'où $AG \times AP = AD \times AB$ ce qui montre que les points D, G, P et B sont cocycliques. D'où D appartient au cercle circonscrit au triangle BPG. Puisque $G \in [CI]$ donc $\angle BCG = \angle BCI = \angle ABC = \angle CQB$, ce qui montre que les triangles BQC et BCG sont semblables et alors on a $BC^2 = BG \times BQ$.

De même les triangles BCD et ABC sont semblables ce qui donne $BC^2 = BD \times BA$.

D'où $BG \times BQ = BD \times BA$ ce qui montre que les points D, A, G et Q sont cocycliques.

D'où D appartient au cercle circonscrit au triangle AGQ. Donc les cercles circonscrits

aux triangles AQG et BPG se recoupent en D qui est un point de la droite (AB).

<u>Méthode 2</u>

On définit D et I comme dans la solution 1. Soit R le point de (AB) tel que $AC = CR$ donc le triangle ACR est isocèle en C. Comme $\angle CRA = \angle CAB = \angle CPA$ donc C, P, R et A sont cocycliques

On a $\angle GPR = \angle APR = \angle ACR = 180° - 2\angle CAB$. Comme $IC = IB$, on a $\angle GIR = \angle CIB = 2\angle CAB = 180° - \angle GPR$. Donc G, P, R et I sont cocycliques. D'où $AI \times AR = AG \times AP$. Comme ACR est isocèle en C alors D est le milieu de $[AR]$ et puisque I est le milieu de $[AB]$

alors $\frac{1}{2}=\frac{AD}{AR}=\frac{AI}{AB}\Rightarrow AD\times AB=AI\times AR=AG\times AP$ donc les points D, G, P et B sont cocycliques.

Alors D est sur le cercle circonscrit au triangle GPB.

<u>Méthode 3</u>

D et I sont toujours définis comme avant.

On a $\angle ACG=\angle ACI=\angle CAI=\angle CAB=\angle CPA=\angle CPG$ donc (AC) est tangente en C au cercle circonscrit au triangle CPG. D'où $AG\times AP=AC^2=AD\times AB$ donc les points D, G, P et B sont cocycliques.

De même $\angle BCG=\angle BCI=\angle CBI=\angle CBA=\angle CQB=\angle CQG$ donc (BC) est tangente en C au cercle circonscrit au triangle CQG. D'où $BG\times BQ=BC^2=BD\times BA$ donc les points D, G, Q et A sont cocycliques.

Alors les cercles circonscrits aux triangles AQG et BPG se recoupent en D qui est un point de la droite (AB).

Corrigé du Sujet 2 $2^{ème}$ tour 2023

Exercice 1

Soit ABCD un quadrilatère inscrit dans un cercle Γ. La parallèle à (BC) passant par D coupe (AC) en P, (AB) en Q et recoupe Γ en R. La parallèle à (AB) passant par D coupe (AC) en S, (BC) en T et recoupe Γ en U.

1. Faire une figure soignée

2. Montrer que les triangles ABC, AQP et STC sont semblables

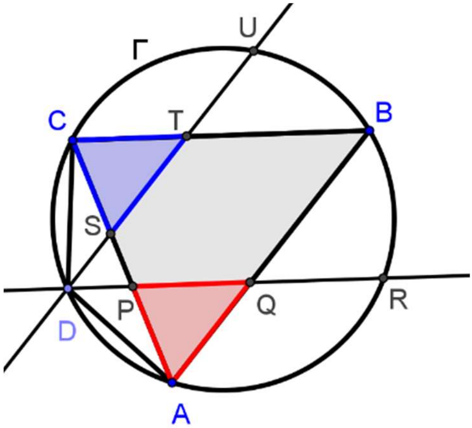
3. Montrer que $\frac{ST}{TU} = \frac{QR}{PQ}$

Corrigé

1. La figure

2. Première méthode : On a $\widehat{PAQ} = \widehat{CAB}$ et $\widehat{AQP} = \widehat{ABC}$ donc les tringles ABC et AQP sont semblables.

De même $\widehat{SCT} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{STC} = \widehat{ABC}$ alors les triangles ABC et STC sont semblables et par conséquent les trois triangles ABC, AQP et STC sont semblables.



<u>2^e méthode</u> : l'homothétie de centre A qui transforme B en Q transforme le triangle ABC en AQP. De même l'homothétie de centre C qui transforme A en S transforme le triangle ABC en STC. D'où la semblance des trois triangles.

3. On peut remarquer que BTDQ est un parallélogramme ce qui montre que $\mathbf{BQ = TD}$ et $\mathbf{DQ = BT}$

La puissance du point Q par rapport au cercle Γ donne

$\mathbf{QA \times QB = QD \times QR \Rightarrow \frac{QR}{QA} = \frac{QB}{QD}}$ celle du point T donne aussi

$$\mathbf{TB \times TC = TD \times TU}$$

D'après la question 2, ABC et AQP sont semblables donc

$\frac{QA}{QP}=\frac{BA}{BC}$ **et de même ABC étant semblable à STC on a**

$\frac{BA}{BC}=\frac{TS}{TC}$.

$$\frac{QR}{PQ}=\frac{QR}{QA}.\frac{QA}{PQ} \quad \text{multiplication des deux membres par par QA}$$
$$=\frac{QB}{QD}.\frac{BA}{BC} \quad \text{puissance de Q et ABC semblable à AQP}$$
$$=\frac{TD}{TB}.\frac{TS}{TC} \quad \text{BTDQ parallélogramme et ABC semblable à STC}$$
$$=\frac{TC}{TU}.\frac{TS}{TC} \quad \text{puissance de T}$$
$$=\frac{TS}{TU} \quad \text{simplification}$$

Exercice 2

Soit a, b et c trois réels strictement positifs tels que $abc=1$ **.**

1. a) Justifier que $a^5+b^5=(a+b)\left[a^2b^2+(a-b)(a^3-b^3)\right]$

b) En déduire que $a^5+b^5\geq(a+b)a^2b^2$

2. Montrer que $\frac{ab}{ab+a^5+b^5}+\frac{bc}{bc+b^5+c^5}+\frac{ca}{ca+c^5+a^5}\leq 1$

Corrigé

1. a) La factorisation de a^5+b^5 donne

$$\begin{aligned}a^5+b^5 &= (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)\\ &= (a+b)(a^2b^2+a^3(a-b)-b^3(a-b))\\ &= (a+b)\left[a^2b^2+(a-b)\left(a^3-b^3\right)\right]\end{aligned}$$

b) Comme a^3-b^3 et $a-b$ sont de même signe alors

$(a-b)(a^3-b^3)\geq 0$ donc $a^2b^2+(a-b)\left(a^3-b^3\right)\geq a^2b^2$ d'où

$$a^5+b^5\geq(a+b)a^2b^2$$

2. Comme $a^5+b^5\geq a^2b^2(a+b)$, alors en multipliant par c^2 et en utilisant que $abc=1$ on trouve

$$c^2\left(a^5+b^5\right)\geq c^2a^2b^2(a+b)=a+b$$
$$\Rightarrow c^2ab+c^2\left(a^5+b^5\right)\geq c^2ab+a+b=a+b+c$$

Donc on a $\dfrac{ab}{ab+a^5+b^5}=\dfrac{c^2ab}{c^2ab+c^2\left(a^5+b^5\right)}\leq\dfrac{c}{a+b+c}$

Par identification on aura

$$\frac{bc}{bc+b^5+c^5}\leq\frac{a}{a+b+c} \text{ et } \frac{ca}{ca+c^5+a^5}\leq\frac{b}{b+c+a}.$$

La somme de ces trois dernières inégalités donne le résultat

$$\frac{ab}{ab+a^5+b^5}+\frac{bc}{bc+b^5+c^5}+\frac{ca}{ca+c^5+a^5}\leq\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$$

Exercice 3

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $2 + x \geq 3\sqrt[3]{x}$

2. Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, un polynôme à coefficients réels positifs, tels que $a_n = a_0 = 1$. On suppose que P admet n racines réelles.

a) Montrer que toutes les racines de P sont négatives

b) Démontrer que $P(2) \geq 3^n$.

Corrigé

1. Méthode 1 : $2 + x = 1 + 1 + x \geq 3\sqrt[3]{1 \times 1 \times x} = 3\sqrt[3]{x}$

Méthode 2: Soit $f(x) = (2 + x)^3 - 27x$, $x > 0$.

On a $f'(x) = 3(2 + x)^2 - 27 = 3(x - 1)(x + 5)$

Donc $\forall x > 0$; $f(x) \geq f(1) = 0$. D'où l'inégalité

2. a) P s'écrit sous la forme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n = a_0 = 1$.

Soit α une racine de P, donc $P(\alpha)=0$. Supposons que $\alpha>0$

alors $P(\alpha)=\sum_{k=0}^{n}a_k\alpha^k=\sum_{k=1}^{n}a_k\alpha^k+a_0\geq a_0=1>0$ ce qui est contradictoire.

D'où toutes les racines de P sont négatives.

b) Soient $-\alpha_1,-\alpha_2,...,-\alpha_n$ les racines de P avec $\alpha_k\geq 0$ pour $1\leq k\leq n$ donc on a $P(x)=(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)...(x+\alpha_n)=\prod_{k=1}^{n}(x+\alpha_k)$.

Alors $P(2)=\prod_{k=1}^{n}(2+\alpha_k)$.

D'après la question 1. on a $2+\alpha_k\geq 3\sqrt[3]{\alpha_k}$ d'où

$$P(2)=\prod_{k=1}^{n}(2+\alpha_k)\geq\prod_{k=1}^{n}\left(3\sqrt[3]{\alpha_k}\right)=3^n\sqrt[3]{\prod_{k=1}^{n}\alpha_k}$$

Or $\prod_{k=1}^{n}\alpha_k=P(0)=1$ d'où $P(2)\geq 3^n$.

Exercice 4

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.

Montrer la relation : $\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(a+b-t)dt\ (1)$.

2. On considère l'intégrale : $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

On cherche à calculer I par deux méthodes.

a) En posant $x = \tan t$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, montrer que

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t)\,dt.$$

b) En utilisant (1) montrer que : $2I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,dt$ puis déterminer I.

3. a) En posant $x = \frac{1-t}{1+t}$ pour $t \in [0,1]$, montrer que :

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln 2}{1+t^2}\,dt.$$

b) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+t^2}$ puis retrouver I.

Corrigé

1. Procédons par changement de variable. Soit $x = a + b - t$ donc $dx = -dt$ en plus $t = a \Rightarrow x = b$ et $t = b \Rightarrow x = a$ d'où

$$\int_a^b f(a+b-t)\,dt = -\int_b^a f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

2. Si $x=\tan t$ alors $dx=(1+\tan^2 t)dt$. En plus

$x=0 \Rightarrow \tan t=0 \Rightarrow t=0$ **et** $x=1 \Rightarrow \tan t=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$ **donc**

$$I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan t)}{1+\tan^2 t}\left(1+\tan^2 t\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan t\right)dt$$

b) D'après (1) on a $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan(\frac{\pi}{4}-t)\right)dt$ **or**

$\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)=\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)=\ln 2-\ln(1+\tan t)$ **d'où**

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\ln 2-\ln\left(1+\tan t\right)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt$ **ce qui**

donne $2I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dt=\frac{\pi\ln 2}{4} \Rightarrow \boxed{I=\frac{\pi\ln 2}{8}}$

3. a) $x=\frac{1-t}{1+t} \Rightarrow 1+x=1+\frac{1-t}{1+t}=\frac{2}{1+t}$ **et** $dx=\frac{-2}{(1+t)^2}dt$ **.**

$t=0 \Rightarrow x=1$ **et** $t=1 \Rightarrow x=0$ **. En plus** $\ln(1+x)=\ln 2-\ln(1+t)$ **et**

$$1+x^2=\frac{2(1+t^2)}{(1+t)^2}$$

Donc

$$I=\int_0^1\frac{\ln\left(1+x\right)}{1+x^2}dx$$
$$=\int_1^0\frac{\left(\ln 2-\ln\left(1+x\right)\right)\left(1+t\right)^2}{2(1+t^2)}\times\frac{-2}{(1+t)^2}dt$$
$$=\int_0^1\frac{\left(\ln 2-\ln\left(1+x\right)\right)}{(1+t^2)}dt$$
$$=\int_0^1\frac{\ln 2}{(1+t^2)}dt-I$$

d'où $2I=\int_0^1\frac{\ln 2}{1+t^2}dt$.

b) $\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\left[\tan^{-1}t\right]_0^1=\tan^{-1}1-\tan^{-1}0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$ d'où

$2I=\ln 2\times\frac{\pi}{4}\Rightarrow I=\frac{\pi\ln 2}{8}$.

Corrigé du Sujet 3 $\qquad$ 2ème tour 2022

Exercice 1:

Soient x, y et z trois réels non nuls tels que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

a) Monter que : $(xy)^3+(zy)^3+(xz)^3=3(xyz)^2$

b) En déduire que : $\frac{x+y}{z}+\frac{z+x}{y}+\frac{y+z}{x}=-3$

Corrigé

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{xyz}(xy+yz+zx)=0 \Leftrightarrow xy+yz+zx=0$.

Posons $a=xy;\ b=yz$ et $c=zx$.

Donc on $a+b+c=0 \Leftrightarrow a+b=-c \Leftrightarrow (a+b)^3=-c^3$

Alors on a $a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)=3abc$. Or

$abc=(xy)(yz)(zx)=(xyz)^2$.

D'où $(xy)^3+(zy)^3+(xz)^3=3(xyz)^2$

$$(xy)^3+(zy)^3+(xz)^3=3(xyz)^2$$

b) $\Leftrightarrow \dfrac{(xy)^3+(zy)^3+(xz)^3}{(xyz)^2}=3$

$\Leftrightarrow \dfrac{xy}{z^2}+\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{zx}{y^2}$

$\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{xy}{z}\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{xy}{z^2}=-\dfrac{xyz}{z^3}$ **et par identification on a**

$\dfrac{z+x}{y}=-\dfrac{xyz}{y^3}$ **et** $\dfrac{y+z}{x}=-\dfrac{xyz}{x^3}$.

D'où $\dfrac{x+y}{z}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{y+z}{x}=-\dfrac{xyz}{z^3}-\dfrac{xyz}{y^3}-\dfrac{xyz}{x^3}=-xyz\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{1}{z^3}\right)$

or $\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{1}{z^3}=\dfrac{(xy)^3+(zy)^3+(xz)^3}{(xyz)^3}=\dfrac{3(xyz)^2}{(xyz)^3}=\dfrac{3}{xyz}$ **d'où**

$\dfrac{x+y}{z}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{y+z}{x}=-xyz\times\dfrac{3}{xyz}=-3$

<u>Exercice</u> 2 :

Pour $n\in\mathbb{N}^*$**, on pose** $S_n=1+23+23^2+...+23^{n-1}$.

1° Vérifier que : $S_{2022}-23\times S_{2021}=1$ **en déduire que** 23 **et** S_{2022} **sont premiers entre eux.**

2° Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ **:** $22S_n=23^n-1$.

3° a) Vérifier que : $23^{2022}\equiv 1\,[S_{2022}]$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $23x \equiv 1[S_{2022}]$

4° On admet que 2017 est premier.

a) Démontrer que si n est un nombre premier et différent de 2 et 11 alors n divise $S_n - 1$.

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de S_{2022} par 2017.

Corrigé

1° $$S_{2021} = 1 + 23 + 23^2 + \ldots + 23^{2020}$$
$$\Rightarrow 23 \times S_{2021} = 23 + 23^2 + \ldots + 23^{2021} = S_{2022} - 1$$

d'où $S_{2022} - 23 \times S_{2021} = 1$. D'après l'identité de Bézout on en déduit que 23 et S_{2022} sont premiers entre eux

2° $\forall n \in \mathbb{N}^*$, S_n est la somme de n termes d'une suite géométrique de raison 23 d'où $S_n = \dfrac{23^n - 1}{22}$ ce qui prouve que $22S_n = 23^n - 1$.

3° a) On a $22S_{2022} = 23^{2022} - 1$ d'où S_{2022} divise $23^{2022} - 1$ ce qui montre que $23^{2022} \equiv 1\ [S_{2022}]$.

b) Comme $23^{2022} \equiv 1\ [S_{2022}]$ alors

$$23x \equiv 1[S_{2022}] \Rightarrow 23^{2022}x \equiv 23^{2021}[S_{2022}] \Rightarrow \boxed{x \equiv 23^{2021}[S_{2022}]}$$

4° a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $22S_n = 23^n - 1$

On a $22S_{n-1} = 23^{n-1} - 1$, or n est premier et 23 premier donc $23^{n-1} \equiv 1[n]$ (petit théorème de Fermat) donc n divise $23^n - 1$ alors il divise $22S_{n-1}$ et comme n divise pas 22 alors il divise S_{n-1} et par conséquence il divise $23S_{n-1}$ et comme $23S_{n-1} = S_n - 1$ alors on a démontré que n divise $S_n - 1$.

b) D'après 4° a) on a 2017 divise $S_{2017} - 1$. D'autre part on a

$$\begin{aligned} S_{2022} &= \left(1 + 23 + 23^2 + ... + 23^{2016}\right) + \left(23^{2017} + ... + 23^{2021}\right) \\ &= S_{2017} + 23^{2017} + ... + 23^{2021} \end{aligned}$$

Or $S_{2017} \equiv 1[2017]$ et $23^{2016} \equiv 1[2017]$

Soit

$$\begin{aligned} N &= 23^{2017} + ... + 23^{2021} \\ &= 23^{2016}\left(23 + 23^2 + 23^3 + 23^4 + 23^5\right) \\ &= 23^{2016}(S_6 - 1) \\ \Rightarrow N &\equiv S_6 - 1[2017] \end{aligned}$$

D'où $S_{2022} \equiv S_6[2017]$.

$S_6 = 1 + 23 + 23^2 + 23^3 + 23^4 + 23^5$ on a $23^2 = 529$,

$23^3 = 23 \times 529 = 12167 \Rightarrow \boxed{23^3 \equiv 65[2017]}$; $23^4 \equiv 23 \times 65[2017]$ et

$23 \times 65 = 1495 \Rightarrow \boxed{23^4 \equiv 1495[2017]}$

$23^5 \equiv 23 \times 1495[2017]$ et $1495 \equiv -522[2017]$

or $23 \times (-522) = -12006 \equiv -1921[2017]$

En plus $-1921 \equiv 96[2017] \Rightarrow \boxed{23^5 \equiv 96[2017]}$

$S_6 \equiv 1 + 23 + 529 + 65 + 1495 + 96[2017]$

$\Rightarrow S_6 \equiv 2209[2017]$

$\Rightarrow \boxed{S_6 \equiv 192[2017]}$

D'où le reste de la division euclidienne de S_{2022} par 2017 est 192.

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle et D un point du segment $[BC]$ distinct de B et C..

1° Montre que $BD \times AC^2 + DC \times AB^2 = BC \times \left(AD^2 + BD \times DC\right)$

2° On suppose que le triangle ABC est équilatéral de côté 10cm et que $AD \in \mathbb{N}$ déterminer alors les distances BD et CD.

Corrigé

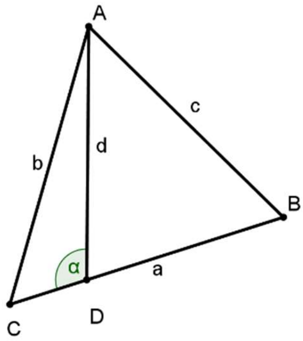
1° Soit $x = CD$ et $y = DB$.

D'après Alkashi on a :

$b^2 = d^2 + x^2 - 2dx\cos\alpha$ et

$c^2 = d^2 + y^2 - 2dy\cos(\pi - \alpha) \Rightarrow c^2 = d^2 + y^2 + 2dy\cos\alpha$

D'où :



$$\begin{cases} b^2 = d^2 + x^2 - 2dx\cos\alpha \\ c^2 = d^2 + y^2 + 2dy\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yb^2 = yd^2 + yx^2 - 2dxy\cos\alpha \\ xc^2 = xd^2 + xy^2 + 2dxy\cos\alpha \end{cases}$$

La somme des deux équations donne

$$xc^2 + yb^2 = (x+y)d^2 + xy(x+y) = (x+y)(d^2 + xy) = a(d^2 + xy)$$

D'où $BD \times AC^2 + DC \times AB^2 = BC \times \left(AD^2 + BD \times DC\right)$

2° Soit $n = AD$ **donc n est un entier naturel. En plus** $n \in [5;10[$

donc $n \in \{5;6;7;8;9\}$ **.**

Soit x la plus petite valeur entre CD et BD.

D'après la question précédente on a

$$\begin{aligned} & AD^2 + BD \times DC = 100 \\ & \Rightarrow n^2 + x(5 - x) = 100 \\ & \Rightarrow x^2 - 5x + 100 - n^2 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4n^2 - 375 < 0$ **alors l'équation n'a pas de solution.**

Exercice 4:

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+x-1$. On note α l'unique solution de l'équation $f(x)=0$.

1) Soit la suite (x_n) définie par $x_0=\frac{3}{4}$ et $x_{n+1}=1-x_n^3$.

Déterminer le comportement de cette suite et l'interpréter graphiquement.

2) Soit la suite (y_n) définie par $y_0=1$ et $y_{n+1}=y_n-\frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$

Montrer par récurrence que la suite (y_n) est décroissante et minorée par α .

En déduire qu'elle converge vers α.

Corrigé

1° $x_1=1-x_0^3=1-\frac{27}{64}=\frac{37}{64}$. Donc $0<x_1<x_0<1$. Si

$0<x_n<x_{n-1}<1$ alors on aura

$0<x_n^3<x_{n-1}^3<1 \Rightarrow -1<-x_{n-1}^3<-x_n^3<0 \Rightarrow 0<1-x_{n-1}^3<1-x_n^3<1$.

D'où $0<x_n<x_{n-1}<1 \Rightarrow 0<x_{n+1}<x_n<1$.

Donc la suite (x_n) est strictement décroissante et bornée alors elle est convergente. Soit L sa limite. On a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=0$. **Comme f est continue sur** $\mathbb{R}$ **alors d'après le théorème des limites de fonctions composées on a** $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(L)$**. D'où** $f(L)=0$ **or** α **l'unique solution de l'équation** $f(x)=0$**. Donc** $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\alpha}$

2° On a $f(x)=x^3+x-1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+1>0$ **donc f est croissante.**

D'autre part on a $y_{n+1}=g(y_n)$ **où** $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ **.**

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ **et** $\forall x\in\mathbb{R}$ **on a**

$g'(x)=1-\dfrac{\left(f'(x)\right)^2-f''(x).f(x)}{\left(f'(x)\right)^2}=\dfrac{f''(x).f(x)}{\left(f'(x)\right)^2}>0$ **pour tout** $x>\alpha$**.**

D'où g est strictement croissante sur $\left]\alpha,+\infty\right[$**.**

Montrons par récurrence que $\alpha<y_n<y_{n+1}$**.**

On a $y_1=y_0-\dfrac{f(y_0)}{f'(y_0)}=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ **en plus**

$f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{11}{64}>0=f(\alpha)\Rightarrow\alpha<\dfrac{3}{4}$ **alors** $\alpha<y_1<y_0$**.**

En plus $\alpha<y_{n-1}<y_n\Rightarrow g(\alpha)<g(y_{n-1})<g(y_n)\Rightarrow\alpha<y_n<y_{n+1}$**. D'où** $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ \alpha<y_n<y_{n+1}$**.**

Donc la suite $\left(y_n\right)$ **est strictement décroissante et minorée par** α **. Alors elle donc convergente. Sa limite** β **vérifie** $g(\beta)=\beta$ **or** $g(\beta)=\beta\Leftrightarrow f(\beta)=0\Leftrightarrow\beta=\alpha$**.**

Conclusion $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\alpha}$ **.** **.**

Corrigé du Sujet 4 $\qquad$ 2ème tour 2021

Exercice 1: (25 points)

Soit n un entier naturel, $n \geq 1$. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1.a) Déterminer les solutions de l'équation $z^n = 1$.

b) Calculer le produit des solutions de l'équation précédente.

2.a) Soit $p \geq 0$. Calculer la somme $S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.

b) On pose $S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n$. Montrer que $S_2 = 2n$.

Corrigé

1.a) Les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont les complexes

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \omega^k \quad \text{avec } k \in \{0,1,2,...,n-1\}$$

b) Le produit des solutions de l'équation précédente est

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^{0+1+2+...+n-1} = \omega^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1} z_k = (e^{i\pi})^{n-1} = (-1)^{n-1} = \begin{cases} 1 \text{ si n est impair} \\ -1 \text{ si n est pair} \end{cases}$$

2.a) Soit $p \geq 0$. $S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k$ c'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q = \omega^p$. Pour $p = kn$ on a $q = 1$ et donc $S_1 = n$

Pour $p \neq kn$ on a $S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k = \dfrac{1-(\omega^p)^n}{1-\omega^p} = \dfrac{1-(\omega^n)^p}{1-\omega^p} = 0$.

Alors $S_1 = n$ si p est un multiple de n, sinon $S_1 = 0$

b) $S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n} C_n^p (\omega^k)^p = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}\right)$.

$$\Rightarrow S_2 = C_n^0\left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^0\right) + \sum_{p=1}^{n-1} C_n^p\left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}\right) + C_n^n\left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^n\right) = n+0+n = 2n$$

D'où $S_2 = 2n$.

<u>Exercice 2: (25 points)</u>

Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers tels que $\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$

1) Calculer a_6, b_6 et le $\text{pgcd}(a_6, b_6)$.

2.a) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

b) Montrer que, pour tout entier n non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Corrigé

Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers tels que $\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$

1) Calculer a_6, b_6 et le $pgcd(a_6, b_6)$.

$$\left(1+\sqrt{6}\right)^2 = 7+2\sqrt{6}$$
$$\left(1+\sqrt{6}\right)^4 = \left(7+2\sqrt{6}\right)^2 = 73+28\sqrt{6}$$
$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{6}\right)^6 &= \left(1+\sqrt{6}\right)^4\left(1+\sqrt{6}\right)^2 \qquad \text{cx}\\ &= \left(73+28\sqrt{6}\right)\left(7+2\sqrt{6}\right)\\ &= 847+342\sqrt{6}\end{aligned}$$

Donc $a_6 = 847$ et $b_6 = 342$

Calcul du $pgcd(a_6, b_6)$:

$$\begin{aligned}847 &= 2\times 342+163\\ 342 &= 2\times 163+16\\ 163 &= 10\times 16+3\\ 16 &= 5\times 3+1\\ 3 &= 3\times 1+0\end{aligned}$$

L'algorithme d'Euclide montre que le dernier reste non nul est 1 d'où le $pgcd(a_6, b_6) = 1$

2.a) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{6}\right)^{n+1} &= \left(1+\sqrt{6}\right)\left(1+\sqrt{6}\right)^{n}\\ &= \left(1+\sqrt{6}\right)\left(a_n+b_n\sqrt{6}\right)\\ &= \left(a_n+6b_n\right)+\left(a_n+b_n\right)\sqrt{6}\end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+6b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n \end{cases}$

b) Montrons par récurrence que, pour tout entier n non nul, 5 ne divise pas a_n+b_n .

On a $a_1+b_1=1+1=2$ et 5 ne divise pas 2 donc la proposition est vraie pour $n=1$.

Supposons que 5 ne divise pas a_n+b_n . On a

$a_{n+1}+b_{n+1}=2(a_n+b_n)+5b_n \Rightarrow (a_{n+1}+b_{n+1})-5b_n=2(a_n+b_n)$.

Si 5 divise $a_{n+1}+b_{n+1}$ alors 5 divisera $(a_{n+1}+b_{n+1})-5b_n$ donc elle divisera $2(a_n+b_n)$ et par conséquent elle divisera a_n+b_n , ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

D'où : pour tout entier n non nul, 5 ne divise pas a_n+b_n .

c) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n\geq 2$, a_n et b_n sont premiers entre eux.

On a $a_2=7$ et $b_2=2$, comme 7 et 2 sont premiers entre eux alors $a_2\wedge b_2=1$

Supposons que a_n et b_n sont premiers entre eux et soit p un diseur positif commun de a_{n+1} et b_{n+1} .

Alors p divise $a_{n+1}-b_{n+1}$ donc il divise $5b_n$ de même il divise $-a_{n+1}+6b_{n+1}$ qui est égal à $5a_n$.

D'où p divise $5a_n$ et $5b_n$ alors il est un diviseur de 5 c-à-d $p=5$ ou $p=1$.

Puisque p divise a_{n+1} et b_{n+1} alors il divise $a_{n+1}+b_{n+1}$ donc $p\neq 5$ d'où $p=1$ et par conséquence les nombres a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 3: (25 points)

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et Γ un cercle dont le centre L est situé sur le segment $[BC]$. On suppose que le cercle Γ est tangent à (AB) en B' et à (AC) en C'. On suppose aussi que le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est situé sur le petit arc $B'C'$ du cercle Γ. Soit x, y et z les mesures en degré respectivement des angles géométriques $\widehat{COB}$, $\widehat{C'OB'}$ et $\widehat{CAB}$; $x,y,z\in[0,180]$.

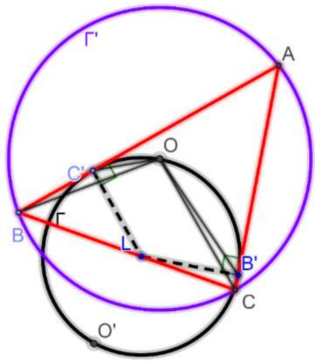
1.a) Justifier que $x<y$.

b) Montrer que $2y-z=180°$ puis en déduire que $z<60°$.

2) Montrer que le cercle Γ coupe le cercle circonscrit au triangle ABC en deux points.

Corrigé

1.a) Justifier que $x < y$.



Les angles étant aigus alors les pieds des hauteurs sont situés sur les cotés (segments) d'où $\widehat{COB} < \widehat{C'OB'} \Rightarrow x < y$

b) Montrer que $2y - z = 180°$ puis en déduire que $z < 60°$.

Les points A, B', C', L sont cocycliques en plus les points A et L sont de part et d'autre de la droite $(B'C')$ d'où

$\widehat{C'LB'} = \pi + \widehat{C'AB'} = 180 + \widehat{CAB} = 180° + z$. D'autre part d'après le théorème de l'angle inscrit on a $\widehat{C'LB'} = 2\widehat{C'OB'} = 2y$ d'où

$$2y = 180° + z \Rightarrow \boxed{2y - z = 180°}$$

$$2z = 2\widehat{CAB} = \widehat{COB} < \widehat{C'OB'} = \pi - \frac{1}{2}\widehat{C'LB'} = \pi - \frac{1}{2}(\pi - z) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}z$$

$$\Rightarrow 2z - \frac{1}{2}z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow z < \frac{2}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} = 60°$$

Donc on a $\boxed{z < 60°}$.

2) Soit $O' = S_{BC}(O)$ et notons Γ' le cercle circonscrit au triangle ABC

Dans le quadrilatère $ABO'C$ on a

$$\widehat{CAB} + \widehat{CO'B} = \widehat{CAB} + \widehat{COB} \quad \text{(la reflexion conserve les angles géométriques)}$$

$$= \widehat{CAB} + 2\widehat{CAB} \quad \text{(théorème de l'angle inscrit)}$$

$$= 3z$$

Or $z < 60°$ d'où $\widehat{CAB} + \widehat{CO'B} < 180°$

Ce qui montre que le point O' est à l'exterieur du cercle Γ'.

Donc O et O' sont deux points de Γ telsque l'un se trouve à l'interieur de Γ' et l'autre se trouve à l'exterieur.

D'où les cercles Γ et Γ' se coupent en deux points.

Exercice 4: (25 points)

1) Soit x, y et z des nombres réels strictement positifs. Montrer que :

a) $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

b) $\dfrac{1}{(2x+y+z)^2} \leq \dfrac{1}{4(x+y)(x+z)}$.

2) Soit a, b et c des nombres réels strictement positifs tels que

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = a + b + c$.

Montrer que :

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(2b+c+a)^2} + \frac{1}{(2c+a+b)^2} \leq \frac{3}{16}.$$

Corrigé

1) a) $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ **.**

Comparaison entre la moyenne arithmétique et celle géométrique.

Autrement :

$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy > 2xy \Rightarrow (x+y)^2 > 2xy \Rightarrow x+y > 2\sqrt{xy}$$

b) On a $\left((x+y)+(x+z)\right)^2 \geq 4\left(x+y\right)\left(x+z\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2x+y+z)^2} \leq \frac{1}{4(x+y)(x+z)}$$

2) Notons $S = \frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2}$ **. D'après la question précédente on a**

$$4S \leq \frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(a+c)(b+c)}+\frac{1}{(b+c)(a+b)} = \frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\Rightarrow \boxed{S \leq \frac{a+b+c}{2(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (1)}$$

D'après la question 1.a) on a : $a^2b+bc^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2c^2} = 2abc$ **de même** $a^2c+b^2c \geq 2abc$ **et** $ab^2+ac^2 \geq 2abc$ **. D'où**

$$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b \geq 6abc$$

D'autre part

$$\begin{aligned}&9(a+b)(b+c)(c+a)-8(a+b+c)(ab+bc+ca)\\&\qquad = (a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)-6abc \geq 0\end{aligned}$$

D'où $9(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{9}{8} \quad (2)}$$

$$\text{Or } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c \Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca}{abc}=a+b+c$$

$$\Leftrightarrow \boxed{ab+bc+ca=(a+b+c)abc \quad (3)}$$

D'autre part

$$(ab+bc+ca)^2 = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(a^2bc+ab^2c+abc^2)$$

$$\Rightarrow (ab+bc+ca)^2 = (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2(a+b+c)abc$$

$$\text{Or } 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=(a^2b^2+b^2c^2)+(c^2a^2+a^2b^2)+(b^2c^2+c^2a^2)$$

$$\Rightarrow 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq 2\sqrt{a^2b^4c^2}+2\sqrt{a^4b^2c^2}+2\sqrt{a^2b^2c^4}$$

$$\Rightarrow 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq 2(a+b+c)abc$$

$$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq (a+b+c)abc$$

$$\Rightarrow (ab+bc+ca)^2 \geq 3(a+b+c)abc \Rightarrow \boxed{\frac{(a+b+c)abc}{(ab+bc+ca)^2} \leq \frac{1}{3} \quad (4)}$$

A l'aide des quatre relations précédentes on trouve :

$$S \leq \frac{a+b+c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \times \frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)abc} \times \frac{(a+b+c)abc}{(ab+bc+ca)^2}$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{1}{2} \times \frac{9}{8} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{16}$$

D'où : $$\boxed{\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2} \leq \frac{3}{16}}$$

Corrigé du Sujet 5 $\qquad$ 2ème tour 2020

Exercice 1

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_{n,k} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^k\right)^n}$

1.a) Calculer $I_{0,k}$; $I_{n,1}$ et $I_{1,2}$.

b) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait : $\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$ puis en déduire la valeur de $I_{1,3}$.

2) Pour $k \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_{n,k} = \int_0^1 \frac{x^k}{\left(1+x^k\right)^n} dx$.

a) Etablir une relation entre $J_{n,k}$; $I_{n,k}$ et $I_{n-1,k}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$J_{n,k} = \frac{1}{k(n-1)2^{n-1}} + \frac{1}{k(n-1)} I_{n-1,k}$$

c) En déduire une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-1,k}$ pour tout $n \geq 2$.

d) En déduire $I_{3,2}$.

Corrigé

1° a) $I_{0,k}=\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^k\right)^0}=\int_0^1 dx=1$;

Si $n\neq 1$, $I_{n,1}=\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x\right)^n}=\left[\frac{-1}{(n-1)\left(1+x\right)^{n-1}}\right]_0^1=\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$;

Si $n=1$, $I_{n,1}=I_{1,1}=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\left[\ln(1+x)\right]_0^1=\ln 2$.

$I_{1,2}=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\left[\tan^{-1} t\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$.

b) $\frac{1}{1+x^3}=\frac{a}{1+x}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}=\frac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+(a+c)}{1+x^3}\Rightarrow$

$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b+c=0 \\ a+c=1 \end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{1}{3};b=\frac{-1}{3}\ \text{ et }\ c=\frac{2}{3}$.

Donc $\frac{1}{1+x^3}=\frac{\frac{1}{3}}{1+x}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$.

On peut écrire $\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^3}&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)\\ &=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}.\frac{2x-1}{x^2-x+1}+2.\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)\end{aligned}$$

On a $I_{1,3} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$

Alors $I_{1,3} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$

$\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \frac{1}{3}\left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{3}$ **;**

$\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{6}\left[\ln(x^2-x+1)\right]_0^1 = 0$ **et pour**

$\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$ **on pose**

$t = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$ **donc**

$$\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{-1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\tan^{-1} t\right]_{\frac{-1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

D'où $I_{1,3} = \frac{3\ln 2 + \pi\sqrt{3}}{9}$ **.**

$$J_{n,k} = \int_0^1 \frac{x^k}{\left(1+x^k\right)^n}dx = \int_0^1 \frac{\left(1+x^k\right)-1}{\left(1+x^k\right)^n}dx$$

2° a) $\Rightarrow J_{n,k} = \int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^k\right)^{n-1}}dx - \int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^k\right)^n}dx$

$\Rightarrow \boxed{J_{n,k} = I_{n-1,k} - I_{n,k}}$

$$J_{n,k}+I_{n,k}=\int_0^1 \frac{x^k}{\left(1+x^k\right)^n}dx+\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^k\right)^n}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{\left(1+x^k\right)}{\left(1+x^k\right)^n}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^k\right)^{n-1}}dx$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{n,k}+I_{n,k}=I_{n-1,k}}$$

b) Pour $n>1$; en posant

$$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{x^{k-1}}{\left(1+x^k\right)^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\dfrac{-1}{k(n-1)\left(1+x^k\right)^{n-1}} \end{cases}$$ **on trouve**

$$J_{n,k}=\left[\frac{-x}{k(n-1)\left(1+x^k\right)^{n-1}}\right]_0^1+\frac{1}{k(n-1)}\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^k\right)^{n-1}}dx$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{n,k}=\frac{-1}{k(n-1)2^{n-1}}+\frac{1}{k(n-1)}I_{n-1,k}}$$

c) On a $\begin{cases} J_{n,k}=I_{n-1,k}-I_{n,k} \\ J_{n,k}=\dfrac{-1}{k(n-1)2^{n-1}}+\dfrac{1}{k(n-1)}I_{n-1,k} \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{I_{n,k}=\frac{1}{k(n-1)2^{n-1}}+\left(1-\frac{1}{k(n-1)}\right)I_{n-1,k}}$$

d) $I_{3,2}=\dfrac{1}{16}+\dfrac{3}{4}I_{2,2}$ **or** $I_{2,2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}I_{1,2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{2+\pi}{8}$ **, donc**

$$I_{3,2}=\frac{1}{16}+\frac{3}{4}\times\frac{2+\pi}{8}=\frac{8+3\pi}{32}.$$

Exercice 2

Dans le plan, on donne n points $A_1, A_2, \dots, A_n$. On se propose d'étudier l'existence de n points $M_1, M_2, \dots, M_n$ tels que A_1 soit le milieu de $[M_1, M_2]$, A_2 soit le milieu de $[M_2, M_3]$..., A_{n-1} soit le milieu de $[M_{n-1}, M_n]$ et A_n soit le milieu de $[M_n, M_1]$. On note z_k, a_k les l'affixes respectives des points M_k et A_k.

1) On suppose l'existence d'une solution du problème.

a) Justifier que : $\forall k \in \{1,2,\dots,n-1\}$, $z_k + z_{k+1} = 2a_k$ et $z_n + z_1 = 2a_n$

b) Montrer que :

$$\left(1-(-1)^n\right)z_1 = 2a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - 2a_{n-3} + \dots + 2(-1)^{n-1}a_1$$

2) Discuter selon la parité de n l'existence d'une solution du problème.

Corrigé

1° a) $\forall k \in \{1,2,\dots,n-1\}$, A_k est le milieu de $[M_k M_{k+1}]$

$$\Rightarrow a_k = \frac{z_k + z_{k+1}}{2} \Rightarrow 2a_k = z_k + z_{k+1}.$$

En plus, puisque A_n est le milieu de $[M_n M_1]$ alors

$$a_n = \frac{z_n + z_1}{2} \Rightarrow 2a_n = z_n + z_1.$$

b) D'après la question précédente on a

$$\begin{cases} (-1)^0\left(z_1+z_n\right)=2(-1)^0 a_n \\ (-1)^1\left(z_n+z_{n-1}\right)=2(-1)^1 a_{n-1} \\ (-1)^2\left(z_{n-1}+z_{n-2}\right)=2(-1)^2 a_{n-2} \\ .... \\ (-1)^{n-2}\left(z_3+z_2\right)=2(-1)^{n-2} a_2 \\ (-1)^{n-1}\left(z_2+z_1\right)=2(-1)^{n-1} a_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_1+(-1)^{n-1} z_1=2a_n-2a_{n-1}+2a_{n-2}-2a_{n-3}+...+2(-1)^{n-2}a_2+2(-1)^{n-1}a_1$$
$$\Rightarrow \left(1-(-1)^n\right) z_1=2a_n-2a_{n-1}+2a_{n-2}-2a_{n-3}+...+2(-1)^{n-2}a_2+2(-1)^{n-1}a_1$$

2° Remarquons que si on trouve M_1 alors $M_2=S_{A_1}(M_1)$,

$M_3=S_{A_2}(M_2)$, …, $M_n=S_{A_{n-1}}(M_{n-1})$.

Donc la recherche d'une solution se réduit à trouver M_1, c'est-à-dire trouver le complexe z_1.

Soit (E) l'équation

$$\left(1-(-1)^n\right) z_1=2a_n-2a_{n-1}+2a_{n-2}-2a_{n-3}+...+2(-1)^{n-1}a_1$$

1er cas : Si n est pair l'équation (E) s'écrit :

$$0\times z_1=2a_n-2a_{n-1}+2a_{n-2}-2a_{n-3}+...+2a_2-2a_1$$

$$\Leftrightarrow a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}+...+a_2-a_1=0 \ :$$

Si les affixes des points $A_1, A_2, \dots, A_n$ vérifient

$a_n \neq a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - \dots - a_2 + a_1$ alors (E) n'a pas de solution et donc le problème n'a pas de solution.

Si les affixes des points $A_1, A_2, \dots, A_n$ vérifient

$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - \dots - a_2 + a_1$ alors (E) admet tout complexe z_1 comme solution et donc le problème admet une infinité de solutions.

2nd cas : Si n est impair alors l'équation (E) s'écrit :

$2z_1 = 2a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - 2a_{n-3} + \dots - 2a_2 + 2a_1$

$\Leftrightarrow z_1 = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \dots - a_2 + a_1$. Le nombre z_1 existe toujours, et il est unique. Donc le point M_1 existe . D'où l'existence des points $M_2 = S_{A_1}(M_1)$, $M_3 = S_{A_2}(M_2)$, …, $M_n = S_{A_{n-1}}(M_{n-1})$.

Dans ce cas le problème admet une unique solution.

Exercice 3

Soit $A(z) = (z+1)^{2n} - 1$, où $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a) Montrer qu'il existe un polynôme B tel que $A(z) = z \times B(z)$.

b) Soit $B(z) = b_{2n-1}z^{2n-1} + b_{2n-2}z^{2n-2} + \dots + b_1 z + b_0$, quelle est la valeur de b_0 ?

c) Déterminer, sous forme trigonométrique, les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0, z_1, z_2, ..., z_{2n-1}$ avec $z_0 = 0$.

2.a) On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$. Montrer à l'aide d'un changement d'indice, que $P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

b) En déduire que, si $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.

c) Calculer de deux façons $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. Puis en déduire Q_n et enfin P_n.

Corrigé

1. a) $A(0) = (0+1)^{2n} - 1 = 1 - 1 = 0$, donc 0 est une racine de A, donc A est factorisable par z d'où l'existence d'un polynôme B tel que $A(z) = z \times B(z)$.

b) Comme le degré de A est 2n alors celui de B est $2n - 1$.

D'après le développement du binôme de Newton on a

$$\begin{aligned}A(z) &= (z+1)^{2n}-1\\ &= \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k} z^{k} - 1\\ &= -1 + C_{2n}^{0} z^{0} + C_{2n}^{1} z + \sum_{k=2}^{2n} C_{2n}^{k} z^{k}\\ &= z\left(C_{2n}^{1} + \sum_{k=2}^{2n} C_{2n}^{k} z^{k-1}\right)\end{aligned}$$

alors on a $B(z) = C_{2n}^{1} + \sum_{k=2}^{2n} C_{2n}^{k} z^{k-1}$ **avec** $k \geq 2$ **d'où** $B(0) = C_{2n}^{1}$ **.**

Alors $b_0 = C_{2n}^{1} = 2n$ **.**

c) $A(z) = 0 \Leftrightarrow (z+1)^{2n} = 1 \Leftrightarrow z+1 = e^{i\frac{2k\pi}{2n}} = e^{i\frac{k\pi}{n}} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1$

Les solutions z_k **de l'équation** $A(z) = 0$ **sont tels que** $z_0 = 0$ **et**

pour tout entier $1 \leq k \leq 2n-1$

$$z_k = e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1 = 2i\sin\frac{k\pi}{2n} e^{i\frac{k\pi}{2n}} = 2\sin\frac{k\pi}{2n} e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2n}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_k = 2\sin\frac{k\pi}{2n}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2n}\right)\right)}.$$

On signale que $2\sin\frac{k\pi}{2n} > 0$ **car** $0 < \frac{\pi}{2n} \leq \frac{k\pi}{2n} \leq \frac{(2n-1)\pi}{2n} < \pi$ **.**

2. a) $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n}$**, posons** $p = 2n-k$ **alors** $k = 1 \Rightarrow p = 2n-1$ **et**

$k = n-1 \Rightarrow p = n+1$ **donc**

$$\begin{aligned}
P_n &= \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} \\
&= \prod_{p=n+1}^{2n-1} \sin\frac{(2n-p)\pi}{2n} \\
&= \prod_{p=n+1}^{2n-1} \sin\left(\pi - \frac{p\pi}{2n}\right) \\
&= \prod_{p=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right) \\
&= \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)
\end{aligned}$$

b) on a :

$$\begin{aligned}
Q_n &= \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} \times \sin\frac{n\pi}{2n} \times \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} \times \sin\frac{\pi}{2} \times \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} \quad . \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_n = P_n^{\ 2}}$$

Or $P_n^{\ 2} = Q_n$ **et** $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} > 0$**, on a** $P_n = \sqrt{Q_n}$ **.**

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = \prod_{k=1}^{2n-1}\left(2\sin\frac{k\pi}{2n} e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2n}\right)}\right) = \prod_{k=1}^{2n-1}\left(2\sin\frac{k\pi}{2n}\right) \times \prod_{k=1}^{2n-1} e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2n}\right)}$ **.**

Or $\prod_{k=1}^{2n-1}\left(2\sin\frac{k\pi}{2n}\right)=2^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(\sin\frac{k\pi}{2n}\right)=2^{2n-1}Q_n$ et

$\prod_{k=1}^{2n-1}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2n}\right)}=e^{i\sum_{k=1}^{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2n}\right)}=e^{i(2n-1)\pi}=-1$. D'où $\boxed{\prod_{k=1}^{2n-1}z_k=-2^{2n-1}Q_n}$.

D'autre part on a $B(z)=(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_{2n-1})$. Donc

$B(0)=\prod_{k=1}^{2n-1}(-z_k)=(-1)^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n-1}z_k=-\prod_{k=1}^{2n-1}z_k$ or $B(0)=b_0=2n$ donc

on a $\boxed{\prod_{k=1}^{2n-1}z_k=-2n}$

Alors $-2^{2n-1}Q_n=-2n$ D'où $Q_n=\frac{-2n}{-2^{2n-1}}=\frac{n}{2^{2n-2}}=\frac{n}{4^{n-1}}$ et

$P_n=\sqrt{Q_n}\Rightarrow P_n=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Exercice 4

Soient a, b et c des réels. On considère la matrice

$$M=\begin{pmatrix}(b+c)^2 & b^2 & c^2\\ a^2 & (a+c)^2 & c^2\\ a^2 & b^2 & (a+b)^2\end{pmatrix}$$

1) Montrer que $\det M=2abc(a+b+c)^3$

2) Discuter suivant a, b et c les solutions du système :

$$\begin{cases}(b+c)^2x+b^2y+c^2z=1\\ a^2x+(c+a)^2y+c^2z=1\\ a^2x+b^2y+(a+b)^2z=1\end{cases}$$

Corrigé

1) $$\det M = (b+c)^2\begin{vmatrix}(a+c)^2 & c^2\\ b^2 & (a+b)^2\end{vmatrix} - a^2\begin{vmatrix}b^2 & c^2\\ b^2 & (a+b)^2\end{vmatrix} + a^2\begin{vmatrix}b^2 & c^2\\ (a+c)^2 & c^2\end{vmatrix}$$

$$\det M = (b+c)^2\left[(a+c)^2(a+b)^2 - b^2c^2\right] - a^2\left[b^2(a+b)^2 - b^2c^2\right] + a^2\left[b^2c^2 - c^2(a+c)^2\right]$$

$$\det M = (b+c)^2\big((a+c)(a+b)-bc\big)\big((a+c)(a+b)+bc\big) - a^2b^2\big((a+b)+c\big)\big((a+b)-c\big) + a^2c^2\big(b+a+c\big)\big(b-a-c\big)$$

$$\det M = (b+c)^2(a^2+ab+ac)(a^2+ab+ac+2bc) - a^2b^2(a+b+c)(a+b-c) + a^2c^2(a+b+c)(b-a-c)$$

$$\det M = a(a+b+c)\left[(b+c)^2(a^2+ab+ac+2bc) - ab^2(a+b-c) + ac^2(b-a-c)\right]$$

$$\det M = a(a+b+c)\left[(b^2+2bc+c^2)(a^2+ab+ac+2bc) - ab^2(a+b-c) + ac^2(b-a-c)\right]$$

$$\det M = a(a+b+c)\begin{bmatrix}\cancel{b^2a^2} + \cancel{ab^3} + ab^2c + 2b^3c + 2a^2bc + 2ab^2c + \\ 2abc^2 + 4b^2c^2 + \cancel{a^2c^2} + \\ abc^2 + \cancel{ac^3} + 2bc^3 \cancel{-a^2b^2} \cancel{-ab^3} \\ +ab^2c + ac^2b - \cancel{a^2c^2} - \cancel{ac^3}\end{bmatrix}$$

$$\det M = a(a+b+c)\begin{bmatrix}ab^2c + 2b^3c + 2a^2bc + 2ab^2c + \\ 2abc^2 + 4b^2c^2 + abc^2 + 2bc^3 + ab^2c + ac^2b\end{bmatrix}$$

$$\det M = a(a+b+c)\left[2a^2bc + 2b^3c + 2bc^3 + 4ab^2c + 4b^2c^2 + 4ac^2b\right]$$

$$\det M = 2abc(a+b+c)\left[a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\right]$$

$$\det M = 2abc(a+b+c)(a+b+c)^2$$

$$\det M = 2abc(a+b+c)^3$$

2.a) Si le déterminant de M est non nul c'est-à-dire $abc(a+b+c)\neq 0$, alors le système est de Cramer et on obtient après calcul :

$$x=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2abc(a+b+c)},\quad y=\frac{(a-b-c)(a+b-c)}{2abc(a+b+c)}\ \text{ et}$$

$$z=\frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{2abc(a+b+c)}.$$

b) Si $abc(a+b+c)=0$, on a : $abc=0$ ou $a+b+c=0$

- **1^{er} cas : $abc=0$**
- **Si a = 0 le système s'écrit :**

$$\begin{cases}(b+c)^2x+b^2y+c^2z=1\\ c^2(y+z)=1\\ b^2(y+z)=1\end{cases}$$

- ✓ **Si a = 0 et $b^2\neq c^2$; le système n'a pas de solution.**
- **C'est le même résultat si ($b=0$ et $c^2\neq a^2$) ou ($c=0$ et $a^2\neq b^2$).**

- ✓ **Si $a = 0$ et $b = c \neq 0$; le système équivaut à :**

$$\begin{cases} 4x + y + z = \dfrac{1}{b^2} \\ y + z = \dfrac{1}{b^2} \end{cases}$$

Donc l'ensemble de solutions est $\left\{(0, y, \dfrac{1 - b^2 y}{b^2}); y \in \mathbb{R}\right\}$.

- **Des résultats analogues si ($b = 0$ et $c = a \neq 0$) ou ($c=0$ et $a = b \neq 0$).**

- ✓ **Si $a = b = c = 0$; le système n'a pas de solution.**
- ✓ **Si $a = 0$ et $b = -c \neq 0$; le système équivaut à l'équation:**

$$y + z = \frac{1}{b^2}$$

Donc l'ensemble de solutions est $\left\{(x, y, \dfrac{1 - b^2 y}{b^2}); x, y \in \mathbb{R}\right\}$.

- **Des résultats analogues si ($b = 0$ et $c = -a \neq 0$) ou ($c=0$ et $a = -b \neq 0$).**

- ➢ **2nd cas : $abc \neq 0$ et $a + b + c = 0$:**

Le système équivaut à l'équation: $a^2x + b^2y + c^2z = 1$

Donc l'ensemble de solutions est $\left\{(x, y, \dfrac{1 - a^2x - b^2 y}{c^2}); x, y \in \mathbb{R}\right\}$

Exercice 5

On se propose de déterminer une fonction de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui vérifie les deux conditions : $f(1) = 1$ et pour tous les entiers naturels m et n, $f(m+n) = f(n) \times f(m) + f(n) + f(m)$.

1) On suppose qu'une telle fonction f existe.

a) Calculer $f(0)$ (on pourra poser $n = 0$ et $m=1$).

b) Calculer $f(2)$, $f(3)$ et $f(6)$.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, $f(n+1) = 2f(n) + 1$.

3) On pose pour tout entier naturel n, $g(n) = f(n) + 1$.

Montrer que, pour tous entiers naturels m et n,

$g(n+m) = g(n) \times g(m)$.

4) Donner une fonction f qui répond au problème.

Corrigé

1° a) $f(1) = f(1+0) = f(1) \times f(0) + f(1) + f(0) \Rightarrow 1 = 1 + 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

b) $f(2) = f(1+1) = f(1) \times f(1) + f(1) + f(1) \Rightarrow \boxed{f(2) = 3}$

$$f(3) = f(2+1) = f(1) \times f(2) + f(1) + f(2) = 1 \times 3 + 1 + 3 \Rightarrow \boxed{f(3) = 7}$$

$$f(6) = f(3+3) = f(3) \times f(3) + f(3) + f(3) = 7^2 + 2 \times 7 \Rightarrow \boxed{f(6) = 63}$$

2° $f(n+1) = f(n)\times f(1) + f(n) + f(1) = 2f(n) + 1$

3° On a :

$$\begin{aligned} g(n+m) &= f(n+m) + 1 \\ &= f(n)\times f(m) + f(n) + f(m) + 1 \\ &= f(m)\big(f(n)+1\big) + f(n) + 1 \end{aligned}$$

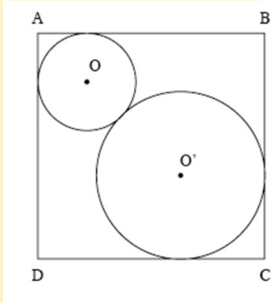
$$\Rightarrow g(n+m) = \big(f(n)+1\big)\big(f(m)+1\big) = g(n)\times g(m)$$

4° $g(n+1) = g(n)\times g(1)$

$$\Rightarrow g(n+1) = f(n+1) + 1 = 2f(n) + 2 = 2\big(f(n)+1\big) = 2g(n)$$

Alors $g(n)$ est une suite géométrique de raison 2, et de premier terme $g(0) = f(0) + 1 = 1$ d'où $g(n) = 2^n$ d'où $\boxed{f(n) = 2^n - 1}$

Exercice 1 : (20 points)



Soit ABCD un carré de coté a. Un cercle $\Gamma(O,r)$ intérieur au carré est tangent à (AB) et (AD). Un second cercle $\Gamma'(O',r')$, intérieur au carré, est tangent extérieurement à Γ ainsi qu'aux droites (CB) et (CD). Soit S la somme des aires des cercles Γ et Γ'.

1° Exprimer $r+r'$ en fonction de a.

2° Quelles sont les valeurs maximale et minimale de S ?

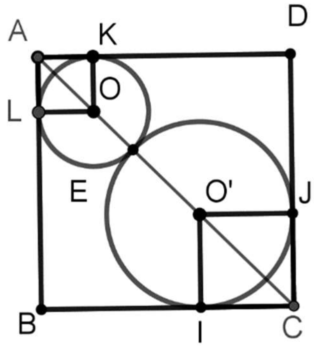
Corrigé

1° Exprimer $r+r'$ en fonction de a.

Les centres O et O' des cercles étant à égale distance des côtés AB et AD pour l'un et des côté CB et CD pour l'autre, les centres des deux cercles sont situés sur la diagonale $[AC]$ et les rayons r et r' des cercles vérifient $OA+r+r'+OC=a\sqrt{2}$ or

$OA = r\sqrt{2}$ **et** $O'C = r'\sqrt{2}$ **d'où** $(r+r')\left(1+\sqrt{2}\right) = a\sqrt{2}$ **donc**

$r + r' = a\left(2-\sqrt{2}\right)$.



2° Quelles sont les valeurs maximale et minimale de S **?**

La somme des aires des deux cercles est

$S = \pi\left(r^2 + r'^2\right) = \frac{\pi}{2}\left[(r+r')^2 + (r-r')^2\right]$ **donc**

$$S = \frac{\pi}{2}\left[\left(6-4\sqrt{2}\right)a^2 + (r-r')^2\right].$$

Les cercles étant situés à l'intérieur du carré de coté a, leurs rayons restent inférieurs à $\frac{a}{2}$**. On en déduit que si** $r = \frac{a}{2}$ **alors** $r' = a\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$ **donc chaque rayon appartient à l'intervalle**

$\left[a\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right), \frac{a}{2}\right]$.

On a $S = \frac{\pi}{2}\left[\left(6-4\sqrt{2}\right)a^2 + (r-r')^2\right]$.

On en déduit immédiatement que cette aire est minimale

quand $r = r' = a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et vaut alors $S = S_{min} = \pi\left(3-2\sqrt{2}\right)a^2$.

Et qu'elle est maximale quand r est maximal et r' minimal (ou

inversement) c'est-à-dire quand $r = \frac{a}{2}$ et $r' = \left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)a$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} S = S_{max} &= \frac{\pi}{2}\left[\left(6-4\sqrt{2}\right)\times a^2 + \left(-1+\sqrt{2}\right)^2 \times a^2\right] \\ &= \pi\left[\frac{9}{2}-3\sqrt{2}\right]a^2 \end{aligned}$$

<u>Exercice 2 ; (20 points)</u>

On se propose de déterminer tous les entiers npour lesquels

$\sqrt{n+12\sqrt{5}} - \sqrt{n-12\sqrt{5}}$ est un entier. Si tel est le cas on pose

$k = \sqrt{n+12\sqrt{5}} - \sqrt{n-12\sqrt{5}}$.

1° Montrer que $4k^2n = k^4 + 5\times 24^2$.

2° En déduire qu'il existe un entier m tel que $km = 24$.

3° Montrer que k est un entier pair.

4° En déduire les valeurs de n pour lesquelles

$\sqrt{n+12\sqrt{5}} - \sqrt{n-12\sqrt{5}}$ est un entier.

Corrigé

1° $k=\sqrt{n+12\sqrt{5}}-\sqrt{n-12\sqrt{5}}$

$\Rightarrow k^2=2n-2\sqrt{n^2-5\times 12^2} \Rightarrow 2n-k^2=2\sqrt{n^2-5\times 12^2}$

$\Rightarrow \left(2n-k^2\right)^2=4\left(n^2-5\times 12^2\right) \Rightarrow 4n^2-4nk^2+k^4=4n^2-4\times 5\times 12^2$

$\Rightarrow 4k^2n=k^4+4\times 5\times 12^2=k^4+5\times 24^2$

2° On a $4k^2n=k^4+5\times 24^2 \Rightarrow k(4nk-k^3)=5\times 24^2=(5\times 24)\times 24$ ce qui montre que k divise 24. D'où l'existence d'un entier m tel que $km=24$.

3° $k^4=4nk^2-5\times 24^2 \Rightarrow k^4=2(2nk^2-5\times 2\times 12^2) \Rightarrow 2 \mid k^4 \Rightarrow 2 \mid k$, d'où k est un entier pair.

4° Si k est un entier alors il serait un diviseur pair de 24, donc $k\in\{2;4;6;8;12;24\}$

Or on a $4k^2n=k^4+5\times 24^2$ et $km=24$ ce qui montre que

$4k^2n=k^4+5\times k^2m^2 \Rightarrow 4n=k^2+5m^2$

⇨ $k=2 \Rightarrow m=12 \Rightarrow 4n=2^2+5\times 12^2 \Rightarrow n=181$

⇨ $k=4 \Rightarrow m=6 \Rightarrow 4n=4^2+5\times 6^2 \Rightarrow n=49$

⇨ $k=6 \Rightarrow m=4 \Rightarrow 4n=6^2+5\times 4^2 \Rightarrow n=29$

⇨ $k=8 \Rightarrow m=3 \Rightarrow 4n=8^2+5\times 3^2=109$ **ce qui est impossible car 4 ne divise pas 109.**

⇨ $k=12 \Rightarrow m=2 \Rightarrow 4n=12^2+5\times 2^2 \Rightarrow n=41$

⇨ $k=24 \Rightarrow m=1 \Rightarrow 4n=24^2+5\times 1^2=581$ **ce qui est impossible car 4 ne divise pas 581.**

Alors $\sqrt{n+12\sqrt{5}}-\sqrt{n-12\sqrt{5}}$ **est un entier si et seulement si** $n\in\{29;41;49;181\}$

Exercice 3 : (20 points)

Soit n un nombre naturel. Notons P_n **la propriété : «** n^2-1 **est multiple de 12 ».**

1° Montrer que P_n **est vraie si n est un nombre premier autre que 2 ou 3.**

2° Donner un exemple de nombre composé (c'est-à-dire non premier) n pour lequel P_n **est vraie et un autre pour lequel** P_n **est fausse.**

3° Si n est composé, à quelle condition sur n la propriété P_n **est-elle vraie ?**

Corrigé

1° n est premier différent de 2 **et** 3 **donc** n **est impair et par suite** $n-1$ **et** $n+1$ **sont tous les deux pairs. On en déduit que** $(n-1)(n+1)=n^2-1$ **est divisible par** 4 **.**

Les entiers $n-1$ **,** n **et** $n+1$ **sont consécutifs donc l'un d'eux est divisible par** 3 **.**

Comme n est premier différent de 3 alors 3 va diviser $n-1$ ou $n+1$ et donc 3 divise $n^2-1=(n-1)(n+1)$. 4 et 3 sont premiers entre eux et divisent n^2-1 donc leur produit $3\times 4=12$ divise n^2-1.

2° Pour $n=25$ on a $n^2-1=625-1=624=12\times 52$, vérifie P_n.

Pour $n=6$ on a $n^2-1=36-1=35$ non divisible par 12 ne vérifie pas P_n.

3° La condition pour qu'un entier composé vérifie P_n est que n ne soit pas divisible par 2 ni, par 3.

En effet si n était pair alors $n-1$ et $n+1$ seraient impairs et donc 12 ne divise pas n^2-1.

Si n était un multiple de 3 alors $n-1$ et $n+1$ ne seraient pas divisibles par 3 et donc 12 ne divise pas n^2-1.

Exercice 4 : (20 points)

Soit p et q deux nombres rationnels strictement positifs. Pour tout $x \in [0;1[$, on pose, $f_{p;q}(x) = \int_0^x t^p (1-t)^q \, dt$.

1° a) Montrer que $(1+p)f_{p;q}(x) - qf_{p+1;q-1}(x) = x^{p+1}(1-x)^q$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 t^n (1-t)^n \, dt = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

2° a) Montrer que :

$$(p+q)(1+p+q)f_{p;q}(x) - pqf_{p-1;q-1}(x) = x^p(1-x)^q((p+q)x-q)$$

b) En déduire la valeur de $F_n(x) = \int_0^x \sqrt[3]{\dfrac{t^n}{(1-t)^{n+3}}} \, dt$

Corrigé

1° a) $\begin{cases} u' = t^p \\ v = (1-t)^q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{p+1} t^{p+1} \\ v' = -q(1-t)^{q-1} \end{cases}$

$$\Rightarrow (1+p)f_{p;q}(x) = \left[t^{p+1}(1-t)^q \right]_0^x + qf_{p+1;q-1}(x)$$

$$\Rightarrow (1+p)f_{p;q}(x) - qf_{p+1;q-1}(x) = x^{p+1}(1-x)^q$$

b) On a $\int_0^1 t^n (1-t)^n \, dt = f_{n;n}(1)$ or

$$(1+n)f_{n;n}(1) = nf_{n+1;n-1}(1) \Rightarrow f_{n;n}(1) = \frac{n}{n+1} f_{n+1;n-1}(1).$$

On démontre facilement par itération ou par récurrence que

$$\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

2° a) On a $(1+p)f_{p\,;\,q}(x)-qf_{p+1\,;\,q-1}(x)=x^{p+1}(1-x)^q$.

Or $f_{p+1\,;\,q-1}(x)=\int_0^x t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,dt=\int_0^x t^p(1-t)^{q-1}(1-(1-t))dt$

$$\Rightarrow \int_0^x t^p(1-t)^{q-1}\,dt-\int_0^x t^p(1-t)^q\,dt=f_{p\,;\,q-1}(x)-f_{p\,;\,q}(x)$$

D'où $(1+p)f_{p\,;\,q}(x)=q\left(f_{p\,;\,q-1}(x)-f_{p\,;\,q}(x)\right)+x^{p+1}(1-x)^q$

$$\Rightarrow (1+p+q)f_{p\,;\,q}(x)=qf_{p\,;\,q-1}(x)+x^{p+1}(1-x)^q \qquad (1)$$

Or d'après 1° on a $qf_{p\,;\,q-1}(x)=pf_{p-1\,;\,q}(x)-x^p(1-x)^q$ **et**

$f_{p-1\,;\,q}(x)=f_{p-1\,;\,q-1}(x)-f_{p\,;\,q-1}(x)$.

D'où $(p+q)f_{p\,;\,q-1}(x)=pf_{p-1\,;\,q-1}(x)-x^p(1-x)^q \qquad (2)$

Donc :

$$(p+q)(1+p+q)f_{p\,;\,q}(x)-pqf_{p-1\,;\,q-1}(x)=x^p(1-x)^q\left((p+q)x-q\right)$$

En multipliant (1) **par** $p+q$ **et en utilisant** (2)**, on trouve que :**

$$(p+q)(1+p+q)f_{p\,;\,q}(x)=q(p+q)f_{p\,;\,q-1}(x)+(p+q)x^{p+1}(1-x)^q \Rightarrow$$

$$(p+q)(1+p+q)f_{p\,;\,q}(x)=q\left(pf_{p-1\,;\,q-1}(x)-x^p(1-x)^q\right)+(p+q)x^{p+1}(1-x)^q$$

D'où

$$(p+q)(1+p+q)f_{p\,;\,q}(x)-pqf_{p-1\,;\,q-1}(x)=x^p(1-x)^q\left((p+q)x-q\right)$$

Exercice 5 : (20 points)

Soit ABC un triangle dont les longueurs des côtés sont toutes différentes : $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. On note Δ_a la bissectrice intérieure de l'angle Â et δ_a sa bissectrice extérieure.

1° I_a et J_a sont les points d'intersection de (BC) respectivement avec Δ_a et δ_a.

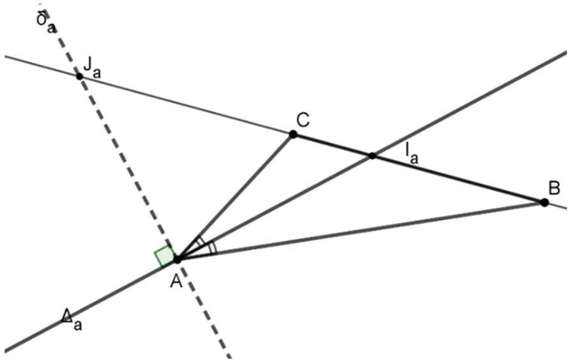
a) Calculer de deux manières différentes les aires des triangles ABI_a et ACI_a.

b) En déduire que : $I_a = bar\{(B,b);(C,c)\}$. Montrer aussi que : $J_a = bar\{(B,-b);(C,c)\}$.

2° Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Montrer que : $I = bar\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$.

3° Soit D le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, N un point du segment $[AB]$ et P le point du segment $[BC]$ tels que : $AN = CP$. Les droites (AP) et (CN) se coupent en Q. Montrer que la droite (DQ) est bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$.

Corrigé



1° a) Chaque point de la bissectrice est à équidistant des deux côtés.

Soit $d = d(I_a,(AB)) = d(I_a,(AC))$. Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

L'aire A_1 du triangle ABI_a est telle que $2A_1 = BI_a \times AH = AB \times d$

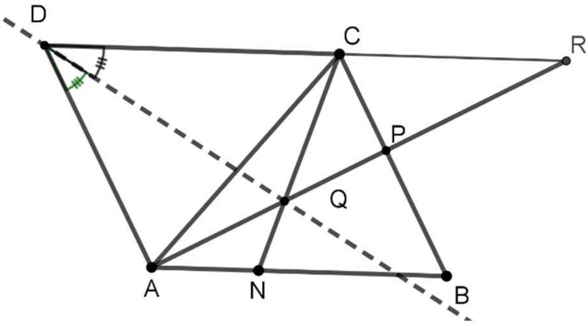
L'aire A_2 du triangle ACI_a est telle que $2A_2 = CI_a \times AH = AC \times d$

b) Le calcul du rapport donne : $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{BI_a}{CI_a} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{a}$.

Alors : $\begin{cases} aBI_a = cCI_a \\ I_a \in [BC] \end{cases}$ c'est-à-dire que : $I_a = \text{bar}\{(B,b);(C,c)\}$.

De même on montre que $\begin{cases} aBJ_a = cCJ_a \\ J_a \notin [BC] \text{ et } J_a \in (BC) \end{cases}$ c'est-à-dire que $J_a = \text{bar}\{(B,-b);(C,c)\}$.

2° Les points jouant le même rôle, on considère I_b intersection de la bissectrice intérieure de $\widehat{B}$ avec (AC). Alors $I_b = \text{bar}\{(A,a);(C,c)\}$. Par associativité le barycentre du système $\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$ est à l'intersection des bissectrices (AI_a) et (BI_b). C'est donc le point I intersection des bissectrices intérieures du triangle ABC. Alors $I = \text{bar}\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$.



3° Soit R l'intersection des droites (AP) et (CD). Pour montrer que (DQ) est bissectrice de l'angle $\widehat{D}$ il suffit de montrer que $Q = \{(A,DR);(C,AD)\}$ (cf 1° b)).

Dans le triangle ARD on a : $\begin{cases} C \in (DR) \\ P \in (AR) \\ (CP) \parallel (AD) \end{cases}$, d'après Thalès on a :

$\dfrac{RC}{DR} = \dfrac{CP}{AD}$ ou encore $\dfrac{RC}{DR} \times AD = CP$.

On a aussi : $\begin{cases} Q \in (CN) \\ Q \in (AR) \\ (CR) \parallel (AN) \end{cases}$, d'après Thalès on a : $\frac{QA}{QR} = \frac{AN}{CR}$ ou

encore $\frac{QA}{QR} \times CR = AN$.

Mais $AN = CP$ et par suite $\frac{QA}{QR} \times CR = \frac{RC}{DR} \times AD$. En simplifiant

par CR on trouve :

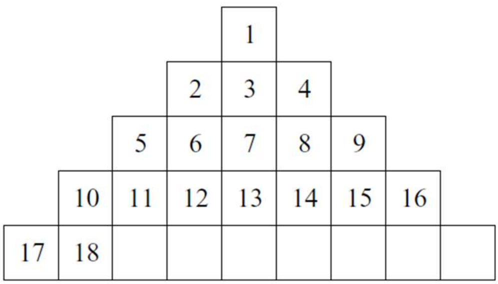
$\frac{QA}{QR} = \frac{AD}{DR}$. Alors : $\begin{cases} AD \times QR = DR \times QA \\ Q \in [AR] \end{cases}$ c'est-à-dire que :

$Q = \text{bar}\{(A, DR); (R, AD)\}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Fin

Corrigé du Sujet 7 2$^{\text{ème}}$ tour 2018

<u>Exercice 1 :</u> (20 points)



Une ligne est désignée par le nombre écrit dans sa première case à gauche.

Une colonne est désignée par le nombre écrit dans sa case la plus haute.

Un nombre est repéré par la ligne et la colonne dans lesquelles il se trouve. Par exemple le nombre 11 est

repéré par (10, 5) , le nombre 8 par (5, 4).

1° Comment est repéré le nombre 42 ?

2° Comment est repéré le nombre 2018 ?

3° Quel est le nombre qui est sous 2018 ?

Corrigé

Soit n le numéro de la ligne et u_n le nombre de cases de cette ligne. On a $u_n = 2n - 1$.

Chaque nombre est égal au nombre de cases précédentes y compris sa case.

Chaque ligne se termine par $n^2 = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1)$.

1° Le nombre 42 est entre $6^2 = 36$ et $7^2 = 49$. Donc il est situé dans la $7^{ièm}$ ligne qui commence par 37 et contient 13 termes et se situe au $6^{ièm}$ rang. La colonne qui le repère est sur la ligne de longueur $13 - 2 \times 5 = 3$ qui commence par 2 et finit par 4. Le nombre 2 est au niveau de 42 tandis que 4 est au niveau de 44. Le nombre 42 est donc repéré par $(37;2)$.

2° Le nombre 2018 est entre $44^2 = 1936$ et $45^2 = 2025$. Donc il est situé dans la $45^{ièm}$ ligne qui commence par 1937 et contient $89 = 2\times 45 - 1$ termes. Le nombre 2018 se situe au $82^{ièm}$ rang ($2018 - 1937 + 1$). La colonne qui le repère est sur la ligne de longueur $89 - 2\times 7 = 75$.

C'est la $38^{ièm}$ ($2n - 1 = 75$) ligne qui commence par $1370 = 37^2 + 1$ et finit par $38^2 = 1444$. Le nombre 1444 est au niveau de 2018 tandis que 1370 est au niveau de 1943.

Le nombre 2018 est repéré par $(1937;1444)$.

3° Le nombre qui est sous 2018 est sur la $46^{ièm}$ ligne qui commence par 2026 et contient $91 = 2\times 46 - 1$ termes et se situe au $83^{ièm}$ rang. Ce nombre est 2108.

<u>Exercice 2 ;</u> (20 points)

On voudrait recouvrir la surface d'un carré ABCD de côté 10 cm avec des disques identiques, de rayon 5 cm.

1) Soit M le point de la diagonale [AC] situé à 10 cm de A, et soit C_1 le cercle de diamètre [AM]. Le cercle C_1 recoupe le côté [AD] en P et le côté [AB] en Q. Soit T le point du côté [CD] situé à 10 cm du point P, et soit C_2 le cercle de diamètre [TP]. Soit U le

point du côté [BC] situé à 10 cm du point Q, et soit C_3 le cercle de diamètre [UQ].

a) Faire une figure et calculer DT.

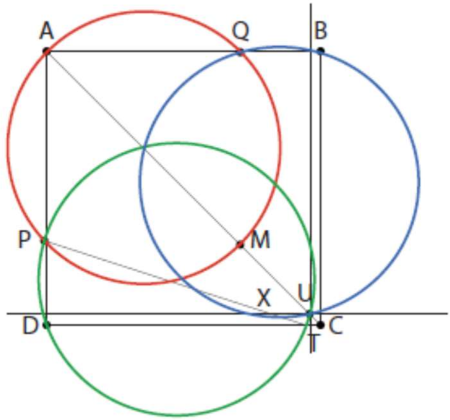
b) On appelle X le point d'intersection de la parallèle à (CD) passant par U et de la parallèle à (BC) passant par T. Prouver que les points M et X sont à l'intérieur de C_2.

c) On dit qu'un cercle recouvre un point lorsque ce point est sur le cercle ou à l'intérieur du cercle. Prouver qu'à eux trois, les cercles C_1, C_2 et C_3 recouvrent plus de 99,75% de la surface du carré ABCD.

2) Prouver qu'il est impossible de recouvrir toute la surface du carré ABCD avec trois disques Γ_1, Γ_2 et Γ_3, chacun de rayon 5 cm.

Corrigé

1° a) Dans la configuration de la figure ci-contre, (C_1) est de diamètre $[AM]$, les triangles APM et AQM sont rectangles respectivement en P et Q .Ces deux points sont donc les projetés orthogonaux respectifs de M sur $[AD]$ et $[AB]$.



De plus M est sur la diagonale $[AC]$ ce qui fait de $AQMP$ un carré de diagonale $10\,cm$ et donc de côté $5\sqrt{2}\,cm$. On a : $PD = AD - AP = 10 - 5\sqrt{2} = 5\left(2-\sqrt{2}\right)$ et $PT = 10$ donc, d'après Pythagore dans le triangle PDT rectangle en D, $DT^2 = PT^2 - PD^2 = 25\left(4\sqrt{2}-2\right)$. On trouve alors : $DT = 5\sqrt{4\sqrt{2}-2}$

.

b) La réflexion s d'axe (AC) laisse A, M et C invariants et transforme D en B et T en U. s étant une isométrie, le triangle TCU est rectangle isocèle en C.

Le point X est tel que $TCUX$ soit un carré, ainsi $X \in [AC]$.

On note O le milieu de $[PT]$ donc le centre de (C_2).

On note H le projeté orthogonal de M sur $[CD]$.

Ainsi $DPMH$ est un rectangle. Puisque T est sur le côté $[CD]$ du carré, le théorème des milieux assure que O est sur la médiatrice commune Δ de $[DP]$ et $[MH]$, qui est donc la parallèle à $[CD]$ passant par O. On a $DH = PM = 5\sqrt{2}$. Or $\sqrt{2} > 1$ donc $4\sqrt{2} - 2 > 2$.

Ainsi d'après a), on $DH < DT$, ce qui veut dire que $H \in [DT]$. Or DPT est rectangle en D, donc $D \in (C_2)$.

Le segment $[DT]$ est donc une corde de (C_2), ce qui prouve que H est à l'intérieur de (C_2).

Par réflexion d'axe le diamètre de (C_2) porté par Δ(parallèle à (CT)), le point M est à l'intérieur de (C_2).

Revenons au point X. La droite Δ est perpendiculaire à (XT) et passe par le point O centre de (C_2). De plus, on a $T \in (C_2)$. On note R le projeté orthogonal de O sur (TX). Le point X est intérieur à (C_2) si et seulement si $TX < 2TR$.

Or on a $2TR = PD = AD - AP = CD - DH$. D'autre part, on a $TX = CT = DC - DT$.

Ainsi, le point X est à l'intérieur de (C_2) si et seulement si $DH < DT$, et nous avons vu ci-dessus que cette dernière inégalité est vraie. Finalement, le point X est intérieur à (C_2).

c) Le cercle (C_1) recouvre le carré $AQMP$. Les points P, D, T sont sur (C_2) et les points M, X sont à l'intérieur de (C_2). Par suite (C_2) recouvre la surface du pentagone $DPMXT$. Par échange des rôles, (C_3) recouvre la surface du pentagone $BQMXU$. Ainsi les trois cercles recouvrent tout $ABCD$ sauf une partie du carré $TCUX$. Pour conclure, il suffit de prouver que l'aire de $TCUX$ ne dépasse pas 0.25% de celle de $ABCD$, c'est-à-dire que $CT < \frac{1}{20}CD$. Cela revient à prouver que $DT > \frac{19}{20}CD$. On a vu au a) que $DT = 5\sqrt{4\sqrt{2}-2}$ et on a $DC = 101$. Il s'agit donc de prouver que $\sqrt{4\sqrt{2}-2} > 1.9$ ou encore que $4\sqrt{2}-2 > (1.9)^2$, c'est-à-dire $\sqrt{2} > 1.4025$, ce qui est vrai.

Ainsi les cercles $(C_1), (C_2), (C_3)$ recouvrent plus de 99.75%.

2° On procède par l'absurde : Supposons que les trois disques $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ chacun de rayon 5 cm, recouvrent entièrement $ABCD$. Comme le carré a quatre sommets et qu'il n y a que trois

cercles, deux des sommets sont recouverts par un même cercle, disons Γ_1.

Comme Γ_1 est de diamètre 10, soit plus petit que la longueur de la diagonale du carré, c'est que Γ_1 recouvrent deux sommets consécutifs, disons A,B. De plus, puisque $AB = 10\,cm$, c'est que $[AB]$ est un diamètre de Γ_1.

Mais alors, hormis ceux de $[AB]$, le cercle Γ_1 ne recouvre aucun autre point du bord de $ABCD$.

On admet que C est recouvert par un des deux autres cercles, disons Γ_2. De même que ci-dessus, le cercle Γ_2 ne peut recouvrir aucun autre point de $[AD]$. Par suite, tout $[AD]$ est recouvert par Γ_3, ce qui implique que $[AD]$ est un diamètre de Γ_3. Mais alors comme ci-dessus, le cercle Γ_3 ne peut recouvrir aucun point de $[BC]$. Par suite, tout $[BC]$ est recouvert par Γ_2 et donc $[BC]$ est un diamètre de Γ_2. Par conséquent aucun des trois cercles ne recouvre $]CD[$. D'où contradiction.

Il est donc impossible de recouvrir toute la surface $ABCD$ par trois disques $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, chacun de rayon $5cm$.

<u>Exercice 3 :</u> (20 points)

Soit (U_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 15; \quad U_1 = 57 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note v_n le reste de la division euclidienne de u_n par 9.

1) Calculer : $v_0, v_1, ..., v_9$.

2) Justifier que la suite (v_n) est périodique.

Déterminer sa période.

3) Trouver le plus grand entier k tel que $3^k \mid U_{2018}$.

<u>Corrigé</u>

1° Les premiers termes sont :

$u_0 = 15, u_1 = 57, u_2 = 72, u_3 = 129, u_4 = 201,$

$u_5 = 330, u_6 = 531, u_7 = 861$, $u_8 = 1392$ et $u_9 = 2253$.

On a : $u_0 \equiv 6[9]$; $u_1 \equiv 3[9]$; $u_2 \equiv 0[9]$;

$u_3 \equiv 3[9]$; $u_4 \equiv 3[9]$; $u_5 \equiv 6[9]$; $u_6 \equiv 0[9]$; $u_7 \equiv 6[9]$;

$u_8 \equiv 6[9]$; $u_9 \equiv 3[9]$.

Donc

$v_0 = 6$	$v_1 = 3$	$v_2 = 0$	$v_3 = 3$	$v_4 = 3$
$v_5 = 6$	$v_6 = 0$	$v_7 = 6$	$v_8 = 6$	$v_9 = 3$

On constate que $v_8 = v_0$ et que $v_9 = v_1$ donc $v_{10} = v_2$ par compatibilité de l'addition avec les congruences.

Plus généralement on a : $v_{n+8} = v_n$. La suite (v_n) est périodique de période 8.

2° En effet, u_0 et u_1 sont multiples de 3, donc $u_2 = u_1 + u_0$ l'est aussi. De même u_3 est divisible par 3.

Plus généralement, si u_{n-1} et u_{n-2} sont multiples de 3, alors u_n l'est aussi. On prouve ainsi de proche en proche (par récurrence, en fait) que pour tout entier n, 3 divise u_n.

Donc $3 \mid u_{2017}$ et $k \geq 1$.

La suite (v_n) est périodique de période 8 et $2017 = 8 \times 252 + 1$ donc $v_{2017} = v_1 = 3$.

On en déduit que 9 ne divise pas u_{2017} et par suite $k < 2$. Donc $k = 1$.

Exercice 4 : **(20 points)**

Trouver tous les nombres réels x, y, z vérifiant : $\begin{cases}(x+1)yz=12\\(y+1)zx=4\\(z+1)xy=4\end{cases}$

Corrigé

Soit (x,y,z) **une solution. I**

l est évident qu'aucun des nombres n'est nul.

En retranchant la troisième équation de la deuxième, on trouve : $xz=xy$**, puis en simplifiant par** x **on obtient** $y=z$**.**

En retranchant la troisième équation de la première, on trouve $y^2-xy=8$ **, ou encore** $xy=y^2-8$ **.**

La deuxième équation se réécrit $y^2x+xy=4$ **.**

Il vient donc : $y(y^2-8)+y^2-8=4$**, ou encore** $y^3+y^2-8y-12=0$

On remarque que $y=3$ **est une solution.**

En effectuant la division par $y-3$ **on trouve :**

$y^3+y^2-8y-12=(y-3)(y^2+4y+4)=(y-3)(y+2)^2$ **.**

On en déduit que $y=z=3$ **ou** $y=z=-2$ **.**

Dans le premier cas, $x = \frac{1}{3}$ et dans le deuxième cas, $x = 2$.

Les seules solutions sont les triplets $(2,-2,-2)$ et $\left(\frac{1}{3},3,3\right)$.

Exercice 5 : (20 points)

Soit f la fonction qui à tout couple d'entiers naturels $(x;y)$ associe l'entier naturel tel que : $f(0;y) = y+1$, $f(x;\ 0) = f(x-1;1)$, $f(x+1;y+1) = f(x;f(x+1;y))$

Calculer $f(2;1)$ et $f(2;2)$.

Corrigé

Numérotons les propriétés :

$f(0;y) = y+1 \quad (1)$

$f(x;\ 0) = f(x-1;1) \quad (2)$

$f(x+1;y+1) = f(x;f(x+1;y)) \quad (3)$

Les propriétés (2) et (1) donnent : $f(1;0) = f(0;1) = 2$

Les propriétés $(2),(3)$ et (1) **donnent :**

$$f(2\ ;\ 0)=f(1;1)=f\big(0;f(1;0)\big)=f(0;2)=3$$

Les propriétés (3) et (1) **donnent :**

$$f(1;2)=f\big(0;f(1;1)\big)=f(0;3)=4$$

Les propriétés (3) et (1) **donnent :**

$$f(2;1)=f\big(1;f(2;0)\big)=f(1;3)=f\big(0;f(1;2)\big)=f(0;4)=5$$

Les propriétés (3) et (1) **donnent :**

$$f(1;4)=f\big(0;f(1;3)\big)=f(0;5)=6$$

Les propriétés (3) et (1) **donnent :**

$$f(2;2)=f\big(1;f(2;1)\big)=f(1;5)=f\big(0;f(1;4)\big)=f(0;6)=7$$

Conclusion : $f(2;1)=5$ et $f(2;2)=7$.

Corrigé du Sujet 8 $2^{ème}$ tour 2017

Exercice 1 (4 points)

On définit pour chaque couple de réels (a,b) la fonction f par :

$$f(x)=a-\sqrt{x+b}$$

Deux nombres réels u et v distincts sont dits échangeables s'il existe au moins un couple de réels (a,b) tels que la fonction f vérifie à la fois $f(u)=v$ et $f(v)=u$.

1) Montrer que 2 et 3 sont échangeables.

2) Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?

3) A quelle condition deux entiers n et m sont-ils échangeables ?

Corrigé

On définit pour chaque couple de réels (a,b) la fonction f par :

$$f(x)=a-\sqrt{x+b}$$

Deux nombres réels u et v distincts sont dits échangeables s'il existe au moins un couple de réels (a,b) tels que la fonction f vérifie à la fois $f(u)=v$ et $f(v)=u$.

1) **Montrer que 2 et 3 sont échangeables.**

On a $\begin{cases} a-\sqrt{2+b}=3 \\ a-\sqrt{3+b}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3=\sqrt{2+b} \\ a-2=\sqrt{3+b} \end{cases}$ **donc il suffit de prendre**

$\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$ **d'où** $f(x)=3-\sqrt{x-2}$

2) **Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?**

On a $\begin{cases} a-\sqrt{n+b}=m \\ a-\sqrt{m+b}=n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-7=\sqrt{4+b} \\ a-4=\sqrt{7+b} \end{cases}$ **d'où**

$(a-7)^2-(a-4)^2=\sqrt{4+b}^2-\sqrt{7+b}^2$ **c'est-à-dire** $a=6$ **d'où**

$\begin{cases} a=6 \\ a-7=\sqrt{4+b} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{4+b}=-1$ **ce qui est impossible, on en déduit**

que 4 et 7 ne sont échangeables.

3) **A quelle condition deux entiers n et m sont-ils échangeables ?**

Soient m **et** n **deux entiers tels que** $n<m$

On a $\begin{cases} a-\sqrt{4+b}=7 \\ a-\sqrt{7+b}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-m=\sqrt{n+b} \\ a-n=\sqrt{m+b} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-m)^2=n+b \\ (a-n)^2=m+b \\ a\geq n \text{ et } a\geq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-m)^2=n+b \\ (a-m)^2-(a-n)^2=n-m \\ a\geq m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=(a-m)^2-n \\ (n-m)(2a-m-n)=n-m \\ a\geq m \end{cases} \quad \text{Or } m\neq n$$

$$\text{d'où} \begin{cases} b=(a-m)^2-n \\ (n-m)(2a-m-n)=n-m \\ a\geq m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{m+n+1}{2} \\ b=(a-m)^2-n \\ \dfrac{m+n+1}{2}\geq m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n+1\geq m \\ a=\dfrac{m+n+1}{2} \\ b=(a-m)^2-n \end{cases} \quad \text{or } n<m \text{ donc } m=n+1$$

En conclusion deux entiers n et m sont-ils échangeables si, et seulement si ils sont consécutifs d'où

$$f(x)=n+1-\sqrt{x-n}$$

Exercice 2 (4 points)

Dans un livre, les pages sont numérotées de 1 à n, et de gauche à droite. La page numérotée 1 est une page de gauche. On additionne les numéros de toutes les pages et on trouve un total égal à 2017. Mais une feuille du livre a été perdue et les numéros des ses pages n'ont pas été comptés.

Quel est le nombre de pages du livre et les numéros des pages de la feuille perdue ?

Corrigé

Soit n le nombre de pages du livre. Le numérotage des pages étant de gauche à droite et la page 1 étant une page de gauche, nous pouvons remarquer que les pages de la feuille déchirée sont une page de numéro impair $2p-1$ et une page de numéro pair $2p$.

Donc la somme de tous les nombres de 1 à n, hormis $2p-1$ et $2p$, est égale à 2017, soit :

$$\frac{n(n+1)}{2} - (4p-1) = 2017 \qquad \textbf{(1).}$$

Or $2 \leq 2p \leq n$ **d'où** $1 \leq 2p-1 \leq n-1$ **ainsi** $3 \leq 4p-1 \leq 2n-1$

donc $-2n+1 \leq -(4p-1) \leq -3$

On en déduit que $\frac{n(n+1)}{2} - 2n + 1 \leq \frac{n(n+1)}{2} - (4p-1) \leq \frac{n(n+1)}{2} - 3$

Et donc $\frac{n^2-3n+2}{2} \le 2017 \le \frac{n^2+n-6}{2}$.

double inégalité qui conduit aux deux inéquations

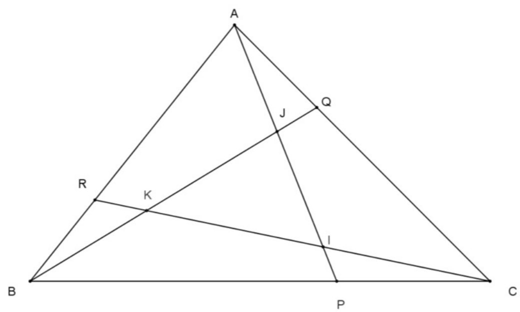
$$\begin{cases} n^2-3n-4032 \le 0 \\ n^2+n-4040 \ge 0 \end{cases}$$

La première inégalité donne $n \le \frac{3+\sqrt{16137}}{2}$ d'où $n \le 65{,}01$ et la deuxième inégalité donne $n \ge \frac{-1+\sqrt{16161}}{2}$ d'où $n \ge 63{,}06$. On a finalement $63{,}06 \le n \le 65{,}01$ or $n \in \mathbb{N}^*$ d'où n est soit égale à 64 ou à 65

De l'égalité (1) on a $2p = \frac{n(n+1)}{4} - 1008$

Si $n=64$ alors $2p=32$ c'est-à-dire que les pages de la feuille déchirée sont

31 et 32.



Si $n=65$ alors

$2p=64{,}5$ ce qui est impossible.

En conclusion

Le nombre de pages du livre est de 64 et les pages de la feuille déchirée sont 31 et 32.

Exercice 3 (4 points)

Soit ABC un triangle direct. On considère les points P, Q et R tels que : $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$. On note I le point d'intersection de (AP) et (CR), J le point d'intersection de (AP) et (BQ) et K celui de (BQ) et (CR).

1.a) Exprimer I, J et K comme barycentre de A, B et C.

b) Montrer que : I est le milieu de $[CK]$, J est le milieu de $[AI]$ et K est le milieu de $[BJ]$

2.a) Montrer qu'une médiane partage le triangle en deux triangles de même aire.

b) Exprimer l'aire de IJK en fonction de l'aire de ABC.

Corrigé

1° a) D'après les hypothèses on a $P=\text{bar}\{(B,1),(C,2)\}$;

$Q=\text{bar}\{(A,2),(C,1)\}$ et $R=\text{bar}\{(A,1),(B,2)\}$.

Chaque point du plan est un barycentre des points A,B et C. On pose : $I=\text{bar}\{(A,a)(B,b),(C,c)\}$ alors $I=\text{bar}\{(A,a),(P,b+c)\}$, associativité du barycentre. Donc $c=2b$. De même

$I=\text{bar}\{(C,c),(R,a+b)\}$, donc $b=2a$. On trouve que $b=2a$, $c=4a$ et $a\neq 0$.

Soit $I=\text{bar}\{(A,1)(B,2),(C,4)\}$

De la même façon on montre que $J=\text{bar}\{(A,4)(B,1),(C,2)\}$ et $K=\text{bar}\{(A,2)(B,4),(C,1)\}$.

b) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{7}\left(2\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}\right)$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{7}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$ donc $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AJ}$ c'est-à-dire que $J=A*I$. On vérifie de la même façon que $K=B*J$ et $I=C*K$.

2° a) Soit EFG un triangle, $L=F*G$ et soit H le pied de la hauteur issue de E. Les triangles EFL et ELG ont la même hauteur EH et pour bases relatives FL et LG. Comme $FL=LG$ alors les deux triangles EFL et ELG sont de même aire. La médiane (EL) partage le triangle EFG en deux triangles EFL et ELG de même aire.

b) Les droites (AK),(BI) et (CJ) sont respectivement des médianes dans les triangles ABJ, BCK et CAI. La droite (KJ) est une médiane dans le triangle AIJ D'après la question 2° a) les triangles $ABK, AKJ, BCI, BIK, CAJ, CJI$ et IJK sont tous de même aire et forment une partition de ABC. Donc l'aire de IJK est égale à un septième de l'aire de ABC.

<u>Exercice 4 (4 points)</u>

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ et soit (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Calculer les dérivées première, seconde et troisième de f.

2. Détermine l'expression de la dérivée $f^{(n)}$ d'ordre n en fonction de n.

<u>Corrigé</u>

1° $f'(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$, $f''(x)=\dfrac{-2}{(x+2)^3}$ **et** $f'''(x)=\dfrac{6}{(x+2)^4}$.

2° Les premières dérivées suggèrent la forme :

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}n!}{(x+2)^{n+1}}.$$

Vérifions qu'elle est vraie pour $n+1$.

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}n!\frac{-(n+1)(x+2)^n}{(x+2)^{2n+2}}=\frac{(-1)^{n+2}(n+1)!}{(x+2)^{n+2}}.$$

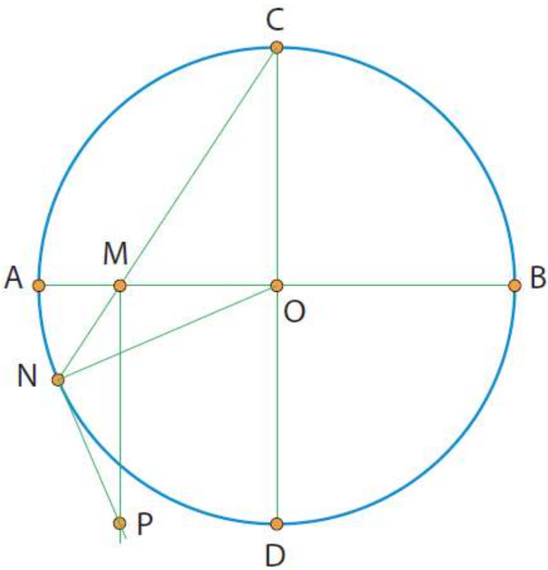
On peut affirmer que : $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}n!}{(x+2)^{n+1}}$ **pour** $n\geq 1$.

Exercice 5 (4 points)

On donne un cercle de centre O et deux diamètres perpendiculaires $[AB]$ et $[CD]$. M étant un point du segment $[AB]$, on trace (CM), qui recoupe le cercle en N. La tangente en N au cercle et la perpendiculaire en M à (AB) se coupent en P.

Montrer que $OP = CM$.

Corrigé



Les points O, M, N, P sont cocycliques. Cela résulte du fait que les angles $\widehat{OMP}$ et $\widehat{ONP}$ sont droits, les points M et N sont donc situés sur le cercle de diamètre OP.

Le quadrilatère OMNP étant inscriptible, on a : $\widehat{NOP} = \widehat{NMP}$ comme angles inscrits qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{NP}$. Or,

$\widehat{NMP} = \widehat{NCD}$ comme angles correspondants et

$\widehat{NCD} = \widehat{NCO} = \widehat{ONC}$ (triangle OCN isocèle en O) donc :

$\widehat{NOP} = \widehat{ONC}$.

Ces angles occupent la position d'alternes internes relativement aux droites (CN) et (OP) coupées par la sécante (ON), le parallélisme de (CM) et (OP) en découle. (CO) et (MP) d'une part et (CM) et (OP) d'autre part étant parallèles, le quadrilatère OCMP est un parallélogramme donc OP = CM.

Publications AMIMATHS

avec l'appui du

Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif

Cahier de Maths 4AS

Contrôle continu 4AS

Contrôle continu 7D

Contrôle continu 7C

Rallyes de Maths 3ème

Rallyes de Maths 5ème

Rallyes de Maths 6ème

Olympiades de Maths 4ème

Olympiades de Maths 7ème

Jeux mathématiques* et *logiques

Publications AMIMATHS

avec l'appui du

Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif

Cahier de Maths 4AS

Contrôle continu 4AS

Contrôle continu 7D

Contrôle continu 7C

Rallyes de Maths 3ème

Rallyes de Maths 5ème

Rallyes de Maths 6ème

Olympiades de Maths 4ème

Olympiades de Maths 7ème

Jeux mathématiques et logiques