Publications AMIMATHS

avec l'appui du

Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif

أصدقاء الرياضيات

AMIMATHS

موريتانيا

CONTROLE CONTINU

MATHEMATIQUES

BAC C

Horma Hamoud

- Exercices d'application
- Sujets type BAC

CONTROLE CONTINU DE MATHS

Terminale - Mathématiques

7C

Horma Hamoud

Si vous décelez une erreur, nous vous remercions par avance de nous en faire part :

e-mail : aamimaths@gmail.com

AMIMATHS

Table des matières

Avant Propos

Les contrôles continus revêtent une importance significative dans tout système éducatif. C’est un outil incontournable pour permettre aux élèves de développer leurs compétences tout au long de l'année scolaire, et d’avoir une vision plus complète de leurs connaissances et de leurs capacités pour préparer efficacement les examens finaux

Ce manuel de contrôles continus en mathématiques est destiné aux élèves de la terminale, série Mathématiques. Les sujets proposés comportent plusieurs types d’exercices de difficultés graduées : exercices d’application directe ; lecture graphique ; problèmes de la vie quotidienne ; exercices type Bac…

Ces sujets sont conçus pour évaluer de manière régulière et approfondie les connaissances et les compétences des élèves. Ils permettent aux élèves : une Auto-évaluation en temps réel ; une progression guidée dans le programme ; une bonne planification du travail ; une gestion rationnelle du temps pendant chaque trimestre ; et un entrainement efficace pour une meilleure préparation du Bac.

Nous, Association AMIMATHS, espérons que la publication de ce manuel sera une contribution précieuse à l'amélioration des niveaux d'élèves en mathématiques.

PREMIER TRIMESTRE

Sujet 1

Exercice 1 (4 points)

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2t = 1 \\ 5x + y - z + 3t = 2 \\ -x + 2y + 3z = 5 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 (4 points)

On considère le système linéaire S_a où a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y + az = a \\ x + ay - z = 1 \end{cases}$$

1) Pour $a = 4$, résoudre le système en utilisant la méthode de Cramer.

2) Résoudre le système S_1 pour $a = 1$.

3) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel a, l'ensemble des solutions du système linéaire S_a .

Exercice 3 (5 points)

Déterminer un nombre naturel à 3 chiffres tel que:

- la somme des chiffres qui le constituent est égale à 22.

- si on intervertit les chiffres des centaines et des dizaines, le nombre augmente de 270.

- si on intervertit les chiffres des dizaines et des unités, le nombre diminue de 18.

Exercice 4 (5 points)

Soit la matrice $$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer la matrice M telle que $A = M - I_3$.

2) Vérifier que M^2 est la matrice nulle. En déduire A^2 .

3) Déduire A^{-1}

4) Résoudre le système $$\begin{cases} -2x - 2y + z = -7 \\ 3x + 5y - 3z = 14 \\ 5x + 10y - 6z = 26 \end{cases}$$

Présentation et rédaction : 2 points.

Sujet 2

Exercice 1 (3 points)

.

Soit la matrice $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 3 \\ -5 & -10 & 7 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer la matrice M telle que $A = M + 2I_3$.

2) Vérifier que M^2 est la matrice nulle. En déduire A^2.

3) Déduire A^{-1}

4) Résoudre le système $$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ -3x - 4y + 3z = 7 \\ -5x - 10y + 7z = 21 \end{cases}$$

Exercice 2 (3 points)

Un commerçant se rend à la banque et retire au guichet la somme de 10000 MRU. Le caissier lui remet exactement 23 billets dont des billets de 1000, des billets de 500 et des billets de 100 Ouguiya.

A la sortie de la banque il se rend dans un magasin et après son passage en caisse il lui reste le quart du nombre de billets de 500 et

le cinquième du nombre de billets de 100, toujours le même nombre de billets de 1000. La somme restante est de 6200 MRU.

Combien avait-il de billets de chaque type à la sortie de la banque ?

Exercice 3 (4 points)

On considère le polynôme *P*, défini sur $\mathbb{C}$, par :

$$P(z) = z^3 - (5+5i)z^2 + (2+22i)z + 8 - 24i$$

1.a) Calculer $P(2)$.

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$

c) Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soient les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $\mathrm{Im}(z_A) < \mathrm{Im}(z_B) < \mathrm{Im}(z_C)$.

a) Placer les points A ,B ,C et G et montrer que les points O,A,B,C sont cocycliques.

b) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;2),(B;-3),(C;5)\}$

c) Donner l'expression complexe de la similitude directe s de centre A qui transforme B en C.

d) Calculer l'affixe du point D image de C par la similitude directe s.

3) On pose $Z = \dfrac{z-3-i}{z-4i}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

a) $\arg Z = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$

b) $|Z| = 1$

c) $|Z| = 2$

d) $2\arg Z = 2(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) \quad [2\pi]$.

Exercice 4 (8 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) Pour tout nombre complexe z , on pose : :

$P(z) = z^3 - 4iz^2 + (-2+4i)z + 8 - 4i$.

a) Calculer $P(2i)$.

b) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$

c) Soient les points A , B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $\text{Im}(z_A) < \text{Im}(z_B) < \text{Im}(z_C)$. Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$ et placer les points A ,B ,C et G.

2) Pour tout réel k différent de 4, on définit l'application f_k du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (5-k)\overrightarrow{MC}\ .$$

a) Exprimer z' l'affixe de M' en fonction de z l'affixe de M.

b) Pour quelles valeurs de k, l'application f_k est une translation? Déterminer alors son vecteur.

c) On suppose que $k \in \mathbb{R} \setminus \{4;5\}$. Montrer que f_k admet un unique point invariant Ω_k. Reconnaître alors f_k et donner ses éléments caractéristiques en fonction de k.

d) Déterminer et construire le lieu géométrique des points Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R} \setminus \{4;5\}$.

3) Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 2i$ on pose : $f(z) = \dfrac{z-1+i}{z-2i}$

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles Γ_k des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) Γ_1 tel que $|f(z)| = 1$.

b) Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur non nul.

c) Γ_3 tel que $f(z)$ soit réel.

d) Γ_4 tel que $|f(z)-1| = \sqrt{10}$.

Présentation et rédaction : 2 points

Sujet 3

Exercice 1 (3 points)

On considère les matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-8&0&-8\\9&0&8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&8\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\ \text{ et }\ Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

1) Calculer $P\times Q$ et $Q\times P$ puis en déduire que les matrices P et Q sont inverses l'une de l'autre.

2) Vérifier que $Q\times A\times P=B$ et montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a $B^n=\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&0&0\\0&0&8^n\end{pmatrix}$.

3) Justifier que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a $A^n=P\times B^n\times Q$ et en déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 2 (3 points)

On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f_a l'application qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que : $z'=(\frac{1}{2}+ai)z+2a+i,\qquad a\in\mathbb{C}$.

Reconnaître l'application f_a et la caractériser pour chacune des valeurs suivantes du nombre complexe a :

i) $a = i$

ii) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

iii) $a = -\frac{1}{2}i$

iv). $a = \frac{1}{2}$

Exercice 3 (4 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2025} = -1$. Donner les solutions sous forme exponentielle.

2) Soit $z = e^{i\frac{\pi}{2025}}$. On pose $S = 1 + z^2 + z^4 + ... + z^{2024}$.

a) Vérifier que $z^{2026} = -z$. En déduire que $S = \frac{1}{1-z}$.

b) Ecrire S sous forme algébrique.

c) En déduire que : $\cos\frac{2\pi}{2025} + \cos\frac{4\pi}{2025} + ... + \cos\frac{2024\pi}{2025} = \frac{-1}{2}$.

Exercice 4 (8 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z)=z^3-(5+6i)z^2+(-2+22i)z+14-12i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(3+i)$.

b) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z)=(z-3-i)(z^2+az+b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

2) Soient les points A , B et C d'affixes respectives $z_A=1+i, z_B=1+4i$ et $z_C=3+i$.

On pose $Z=\dfrac{z-1-4i}{z-1-i}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

a) $\arg Z=\dfrac{\pi}{2}\quad[\pi]$

b) $|Z|=1$

c) $|Z|=2$

d) $2\arg Z=2(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})\quad[2\pi]$.

3) Soit f la similitude directe de centre A qui transforme C en B.

a) Donner l'expression complexe f.

b) Déterminer le rapport et un angle de f.

4) Dans la suite de l'exercice on considère les points M_n tels que $M_0(1;2)$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $z_n = 1 + i + \frac{2}{3}\left(\frac{3i}{2}\right)^{n+1}$.

b) Démontrer que tous les points M_n sont situés sur l'une ou l'autre de deux droites que l'on précisera.

Présentation : 2 points

Sujet 4

Exercice 1 (4 points)

1) On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **et**

$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

.

a) Calculer le produit $A \times B$ **.**

b) Calculer le déterminant de A **. En déduire que** A **est inversible puis déterminer** A^{-1} **en utilisant** B **.**

2) On considère le système : $\begin{cases} -2x + 2y - z = 6 \\ 2x - 3y - 2z = -6 \\ -2x + y - z = 0 \end{cases}$

a) Vérifier que ce système est équivalent à : $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Trouver alors la solution de ce système en utilisant A^{-1}.

c) Résoudre, sans nouveaux calculs le système : $\begin{cases} 8u+6v+2t=6 \\ -8u-9v+4t=-6 \\ 8u+3v+2t=0 \end{cases}$.

Exercice 2 (4 points)

1) Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel *n*, le reste de la division euclidienne de 3^n par 5.

2) Trouvez le reste de la division euclidienne de 2023^{2024} par 5.

3) Pour tout entier naturel *n*, on note

$$A_n = 2023^{n+2} + 2023^n$$

a) Montrer que A_n est divisible par 5.

b) Le nombre A_n est-il divisible par 30 ? Justifier.

Exercice 3 (6 points)

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points $A(-3+2i)$, $B(2+2i)$, et M un point variable d'affixe z.

On désigne par S_1 la similitude directe qui, au point M, associe le point M_1 d'affixe $z_1 = (1+i)z + 2 + 3i$,

et par S_2 la similitude directe qui, au point M associe le point M_2 d'affixe $z_2 = (1-i)z - 2 + 2i$.

1.a) Donner les éléments caractéristiques de chacune des deux similitudes directes S_1 et S_2.

b) Montrer que $S_2 \circ S_1$ est une homothétie dont on précisera le rapport et le centre J.

c) Montrer que l'application f qui transforme M_1 en M_2 est une rotation, dont on précisera le centre Ω et l'angle.

2) Soit I le milieu de $[M_1M_2]$ On désigne par t l'application définie par : $t(M) = I$.

a) Montrer que t est une translation dont on précisera le vecteur.

b) Montrer que si M_1 est distinct de Ω, alors les droites (ΩI) et (M_1M_2) sont perpendiculaires.

3.a) Montrer que pour $M \neq A$: $\dfrac{z_2 - z_1}{z - z_1} = \dfrac{2\left(z + \frac{1}{2} - 2i\right)}{z + 3 - 2i}$.

b) En déduire l'ensemble des points M tels que les points M, M_1 et M_2 soient alignés.

Exercice 4 (6 points)

Soit f l'application de $E = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans $F = \mathbb{C} \setminus \{i\}$ qui à tout z associe

$$f(z) = \frac{iz}{z+i}.$$

1) Montrer que l'application f est une bijection, donner sa bijection réciproque; puis vérifier que : $\forall z \in F, \quad f^{-1}(z) = -f(-z)$

2) Démontrer que, si $f(z) = e^{i\theta}$ avec $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$,

alors $z = \frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) - i\right)$

3.a) Donner la forme exponentielle des solutions de m'équation $Z^6 = 1$

b) Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation : $(iz)^6 = 32(1 + i\sqrt{3})(z+i)^6$.

Exercice 5 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1) Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 - 7iz^2 - (16+2i)z - 6 + 12i$

a) Calculer $P(3i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z) = (z - 3i)(z^2 + az + b)$$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) : $P(z) = 0$.

2.a) Placer les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $|z_A| < |z_B| < |z_C|$.

b) Donner l'expression complexe de la similitude directe f de centre B qui transforme A en C.

c) Déterminer le rapport de f.

d) Soit θ un angle de f. Montrer que $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ et $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

3) On considère le point $M_0(1,4)$, et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on pose $M_{n+1} = f(M_n)$. Soit z_n l'affixe du point M_n.

a) Soit $M_1 = f(M_0)$. Vérifier, en utilisant l'expression de f, que l'affixe de M_1 est $z_1 = \frac{-3}{5} + \frac{16}{5}i$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $z_n = 3i + \left(\frac{-1+2i}{5}\right)^n (1+i)$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + ... + M_{n-1}M_n$.

Exprimer S_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Sujet 5

Exercice 1 (3 points)

On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f_a l'application qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = (\frac{1}{2} + ai)z + \frac{3}{2} - 3ai, \qquad a \in \mathbb{C}$$

1)Reconnaître l'application f_a et la caractériser pour chacune des valeurs suivantes du nombre complexe a :

i) $a = 2i$

ii) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

iii) $a = -\frac{1}{2}$

2) Dans cette question on donne $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et on note $f_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = f$,

$f^2 = f \circ f, f^{n+1} = f \circ f^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Donner l'expression complexe de f^2, f^3.

b) Caractériser f^{2019} et donner son expression.

Exercice 2 (4 points)

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$$M = \begin{pmatrix} -27 & 12 & -6 & -3 \\ -25 & 0 & -50 & -75 \\ -1 & 6 & 22 & -39 \\ 20 & 30 & 10 & 30 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le produit MB.

2) Sachant que $AM = \lambda I_4$, c'est-à-dire que $AM = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$;

calculer la valeur du nombre réel λ.

3) En déduire la matrice inverse de A.

4) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -5x + y + 2t = 3 \\ 2x + y + z + 4t = 15 \\ x - 2y + 3z - t = -9 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

Exercice 3 (4 points)

Soit x et y des entiers relatifs. On pose $f(x,y) = 2x - 3y$

1.a) Calculer $f(5,3)$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $2x - 3y = 1$.

2) Pour tout entier naturel *n* on pose $X_n = f(5^n, 3^n)$.

Trouver, suivant les valeurs de *n*, le reste de la division euclidienne de X_n par 7.

Exercice 4 (7 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 - (4-2i)z^2 + (4-6i)z - 4 + 8i$.

a) Calculer $P(-2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z) = (z+2i)(z^2 + az + b)$$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. Soient A, B et C les images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $|z_A| < |z_B| < |z_C|$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O;3),(A;-4),(B;1),(C;2)\}$. Vérifier que A est le barycentre du système $\{(O;5),(B;-5),(G;2)\}$.

c) Donner l'expression complexe de la similitude directe s de centre B qui transforme C en A.

d) Calculer l'affixe du point D image de A par la similitude directe s.

3) On pose $Z = \dfrac{z-1-i}{z+2i}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

a) Z est réel

b) $|Z| = 1$

c) $|Z| = 3$

Sujet 6

Exercice 1 (3 points)

On considère le système linéaire S_a où a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} x - y - z = -2 \\ x - y + (a-1)z = 3(a-1) \\ x - (a-1)y - z = -2 \end{cases}$$

1) Résoudre le système S_5 (pour $a=5$).

2) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel a, l'ensemble des solutions du système linéaire S_a.

Exercice 2 (3 points)

1) Soit m un entier relatif.

a)Déterminer les valeurs de m tels que $m+2$ divise 5.

b) Déterminer les valeurs de m tels que le nombre $\dfrac{3m+1}{m+2}$ soit un entier relatif.

2) Soit n un entier naturel.

a)Trouvez, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.

b) En déduire le reste de la division euclidienne de 2022^{2024} par 5.

3) Soit $X = 2022^{2n+1} + 2023^{2n+1}$ où n est un entier naturel.

a) Montrez que pour tout entier naturel n, X est divisible par 5.

b) Montrez que pour tout entier naturel n, X est divisible par 15.

c) Montrez que pour tout entier naturel n, X est divisible par 809.

Exercice 3 (4 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

E_α $\quad z^2 - 2iz\cos\alpha - 1 = 0$ où α est un paramètre réel.

On note z_1 et. $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si $\mathrm{Re}(z_1) \geq 0$ avec E_α les solutions de z_2

1) Résoudre l'équation E_α et donner les solutions sous formes algébrique et exponentielle.

2) On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on note M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Soit Ω le milieu du segment $[M_1M_2]$.

a) Montrer que lorsque α décrit $\mathbb{R}$, les points M_1 et M_2 sont situés sur un cercle que l'on déterminera.

b) Montrer que si $M_1 \neq M_2$, la droite (M_1M_2) a une direction fixe que l'on précisera.

c) Déterminer le lieu géométrique de Ω lorsque α décrit $\mathbb{R}$.

d) Pour une valeur donnée de α dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donner une construction des points M_1, M_2 et Ω.

3.a) Résoudre l'équation $z^n = e^{i\theta}$ où θ est un paramètre réel. .

b) En déduire l'écriture exponentielle des solutions de l'équation :

$$z^{2n} - 2iz^n \cos\alpha - 1 = 0 \text{ où } n \in \mathbb{N}^* \text{ donné.}$$

Exercice 4 (5 points)

1) Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 - (3+4i)z^2 + (-5+12i)z + 15$.

a) Calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

On note z_0 , z_1 et z_2 ces solutions avec $.\mathrm{Re}(z_0) > \mathrm{Re}(z_1) > \mathrm{Re}(z_2)$

2) On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on note A et B les points d'affixes respectives z_1 et. z_2

Soit Ω le milieu du segment $\left[AB\right]$. Soit f l'application qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{2iz+5}{z-2i}$. On note. f(M)=M'

a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

b) Montrer que les points A,B,M,M' sont cocycliques ou alignés.

3 .a) Montrer que $(z'-2i)(z-2i)=1$. En déduire que $\Omega M \times \Omega M' = 1$.

b) Montrer que $(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M}) + (\vec{u},\overrightarrow{\Omega M'}) = 0 \quad [2\pi]$. En déduire une construction géométrique (justifiée) du point M' à partir d'une position donnée du point M non situé sur la droite (AB).

4.a) Déterminer le lieu géométrique Γ_1 du point M' lorsque M décrit le cercle de centre Ω et de rayon 1.

b) Déterminer le lieu géométrique Γ_2 du point M lorsque M' décrit l'axe des ordonnées privé de Ω.

c) Que peut on dire des ensembles Γ_1 et Γ_2 ?

d) Déterminer le lieu géométrique Γ_3 du point M lorsque M' décrit le cercle de centre O et de rayon 2.

Exercice 5 (5 points)

On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit f_a l'application qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que : $z' = (\frac{1}{2} + ai)z + 1 - 2ai, \quad a \in \mathbb{C}$

1) Reconnaître l'application f_a et la caractériser pour chacune des valeurs suivantes du nombre complexe a :

a) $a = -\frac{1}{2}i$ b) $a = \frac{5}{2}i$ c) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $a = \frac{1}{2}$

2) Dans la suite de l'exercice on suppose que $a \in \mathbb{R}$ et on note $\theta = \arg(\frac{1}{2} + ai)$. Soit les points $M_0(3;0)$ et $\Omega(2;0)$. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on pose $M_{n+1} = f_a(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

a) Calculer et écrire sous forme algébrique : z_1 et z_2 en fonction de a.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $z_n = 2 + \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $V_n = |z_n - 2|$. Pour quelles valeurs de θ ; la suite (V_n) est elle convergente ?

d) Calculer en fonction de n : $d_n = \left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$.

Sujet 7

Exercice 1 (3 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $6x + 11y = 2013$.

a) Montrer que pour tout couple (x, y) solution de (E), x est un multiple de 11 et y un multiple de 3.

b) Vérifier que le couple (0,183) est une solution particulière de (E).

c) Résoudre (E).

2) On désigne par d le PGCD de x et y où (x, y) est une solution de (E).

a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?

b) Déterminer, s'ils existent, les couples (p, q) d'entiers naturels tels que $6m + 11d = 2013$, où d désigne le pgcd de p et q, et m leur ppcm.

Exercice 2 (4 points)

Dans le plan orienté on considère un parallélogramme direct ABCD. Soient ADM ; BAP et ACN des triangles directs rectangles isocèles respectivement en A ; B et C. Les affixes des points A ; B et C sont notées respectivement a ; b et c.

1.a) Placer les données sur une figure.

b) Exprimer en fonction de a, b et c les affixes respectives d, p ,n et m des points D, P, N et M.

2.a) Montrer que $p-c=i(m-b)$. En déduire que $PC=MB$ et $(PC)\perp(MB)$.

b) Montrer que $BN=MC$ et $(BN)\perp(MC)$.

c) Montrer que les droites (AM), (BN) et (CP) sont concourantes.

3) Soient K et L les milieux respectifs des segments [AN] et [AP]. On note k et l leurs affixes respectives.

a) Montrer que $m-k=-i(b-k)$ et $m-l=i(c-l)$.

b) Déterminer la nature de chacun des triangles BKM et MLC.

Exercice 3 (6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z)=z^3-(2+6i)z^2-11z-8+6i$

a) Calculer $P(2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) : $P(z)=0$.

c) En déduire les solutions de l'équation (E') : $z^6-(2+6i)z^4-11z^2-8+6i=0$ dans $\mathbb{C}$.

2) Soient A, B et C les images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $|z_A|<|z_B|<|z_C|$.

a) Placer les points A , B et C .

b) Donner l’expression complexe de la similitude directe f de centre A qui transforme C en B.

c) Déterminer le rapport de f.

d) Soit θ un angle de f. Montrer que $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ et $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

3) On considère le point $M_0(3,4)$, et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on pose $M_{n+1} = f(M_n)$. Soit z_n l’affixe du point M_n.

a) Soit $M_1 = f(M_0)$. Vérifier, en utilisant l’expression de f, que l’affixe de M_1 est 2i.

b) **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :** $z_n = -1 + \left(\frac{3+i}{8}\right)^n (4+4i)$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + ... + M_{n-1}M_n$.

Exprimer S_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 4 (7 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On désigne par A et B les points d'affixes respectives –i et 1.

À tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = f(z) = \frac{z}{z+i}$.

1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

a) $|f(z)|=1$

b) $|f(z)-1|=1$

c) $f(z)$ est imaginaire pur

d) $\arg f(z)=\frac{\pi}{3}\quad[\pi]$.

2) Dans cette question on suppose que M décrit le cercle Γ de centre $A(0,-1)$ et de rayon r où $r>0$.

a) Montrer que $(z+i)(z'-1)=-i$, en déduire le lieu géométrique Γ' du point M'. Construire Γ et Γ' dans le cas où $r=1$.

b) Montrer que $(\vec{u},\overrightarrow{AM})+(\vec{u},\overrightarrow{BM'})=-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$.

c) Dans le cas où $r=1$; à partir d'une position donnée de M sur Γ; distinct de O, donner une construction de M'. Justifier.

3) Soit α un réel tel que $\alpha\neq-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$. Montrer que $f(e^{i\alpha})=\frac{1}{2}\left(1+i\tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

4.a) Montrer que si $f(z)=e^{i\theta}$, alors $z=\frac{-1}{2}\left(\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\right)$.

b) En déduire une écriture algébrique des solutions de l'équation :

$z^7=\frac{1}{2}(-\sqrt{3}-i)(z+i)^7$.

Sujet 8

Exercice 1 (3 points)

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - z - 3t = -4 \\ x - 2y + z + 2t = 2 \\ 3x + 2z - t = -2 \\ x - y + 3t = 8 \end{cases}$$

Exercice 2 (4 points)

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 5, on considère les nombres $a_n = n^3 - n^2 - 12n$ et $b_n = 2n^2 - 7n - 4$.

1) Montrer, après factorisation, que a_n et b_n sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.

2) On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β.

a) Etablir une relation entre α et β indépendante de n.

b) Démontrer que d est un diviseur de 5.

c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est un multiple de 5

3) Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.

4-a) Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a_n et b_n.

b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 7$.

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $1078x + 161y = 35$.

Exercice 3 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1.a) Calculer $(3-4i)^2$.

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2 - (9+4i)z + 18 + 12i = 0$.

2) On pose : $P(z) = z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i)z - 12 - 60i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(2+2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z) = (z-2-2i)(z^2 + az + b).$$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2) Soient les points A , B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $\mathrm{Im}(z_A) < \mathrm{Im}(z_B) < \mathrm{Im}(z_C)$.

a) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;2),(B;-3),(C;3)\}$ et placer les points A ,B ,C et G.

c) Donner l'expression complexe de la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

Exercice 4 (4 points)

Soit $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $E(\theta)$ l'équation : $z^2 - 2ize^{i\theta} - 4(1-i)e^{2i\theta} = 0$.

1.a) Résoudre $E(\theta)$, on note z' et z'' les solutions telles que $|z'| > |z''|$.

b) Mettre sous forme exponentielle le nombre z''.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les ponts A,B,C d'affixes respectives $2e^{i\theta}, -2(1-i)e^{i\theta}$ et $2ie^{i\theta}$.

a) Déterminer le lieu géométrique Γ du point A lorsque θ décrit $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que OACB est un parallélogramme.

c) A partir d'une position donnée de A sur Γ, placer les points B et C. Justifier la construction.

3) On considère l'équation $E'(\theta)$: $(\sqrt{2}z-1)^3 = (-2+2i)e^{i\theta}z^3$.

a) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe

$V = (-2+2i)e^{i\theta}$.

b) Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$**. On pose** $\frac{\sqrt{2}z-1}{z} = \sqrt{2}e^{ix}$.

Montrer que $z = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + i\cot\frac{x}{2}\right)$.

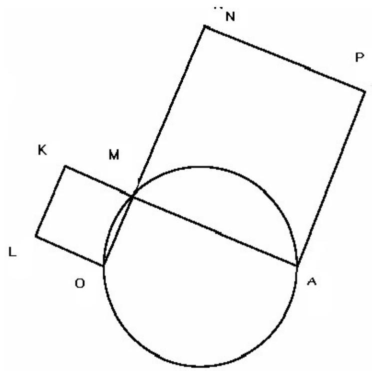
En déduire les solutions de l'équation $E'(\theta)$.

Exercice 5 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle C de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle C , et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct MAPN et MKLO.
La figure est représentée ci-après.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et démontrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1. On note k, l ,m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N et P.



1) Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle C , on a $\left|m-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

2) Écrire en fonction de m chacun des nombres complexes k,l,n et p.

3. a) Démontrer que le milieu Ω du segment [PL] est un point indépendant de la position du point M sur le cercle C .

b) Démontrer que le point Ω appartient au cercle C et préciser sa position sur ce cercle.

4. a) Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.

b) Quelle est la nature du triangle ΩNK ?

5) Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.

Sujet 9

Exercice 1 (4 points)

1.a) Donner la décomposition, en facteurs premiers, de 2023.

b) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 2023 et donner leur liste.

2) On considère l'équation (E) : $21x - 13y = 1$ d'inconnues (x, y) entiers relatifs.

a) Déterminer l'entier p tel que $(p, p+3)$ soit une solution de (E).

b) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

3) Soit A un entier relatif qui vérifie le système (S) : $\begin{cases} A \equiv 7[21] \\ A \equiv 8[13] \end{cases}$

a) Justifier qu'il existe x, y de $\mathbb{Z}$ tels que $A = 21x + 7 = 13y + 8$ où (x, y) est solution de (E)

b) Montrer que A est solution du système (S) si et seulement si $A \equiv 112[273]$.

c) Déterminer l'entier naturel B solution de (S) qui s'écrit $\overline{37a7}$ en base 8 où $0 \le a \le 7$, puis préciser a.

Exercice 2 (4 points)

On pose $f_m(x)=\dfrac{x^3-2mx^2+(m-3)x-2+6m}{x^2-3x+2}$. m est un paramètre réel.

Soit C_m la courbe représentative de f_m dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Déterminer le domaine de définition de f_m et montrer que toutes les courbes C_m passent par un point fixe que l'on déterminera.

2) Discuter suivant les valeurs du paramètre m les limites $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

3) Pour quelles valeurs de m, la fonction f_m admet un prolongement par continuité au point $x_0=1$? Préciser ce prolongement.

Exercice 3 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Soit *S* la transformation du plan qui, à tout M d'affixe *z*, associe le point M′ d'affixe *z′* telle que : $z'=5iz+6i+4$.

Partie A

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristique de la transformation *S*.

2. On note *x* et *x′*, *y* et *y′* les parties réelles et imaginaires respectives de *z* et *z′*.

Démontrer que : $\begin{cases} x' = -5y + 4 \\ y' = 5x + 6 \end{cases}$.

Partie B

Dans cette partie, on se place dans le cas où les coordonnées *x* et *y* du point M sont des entiers relatifs tels que $-3 \le x \le 5$ et $-3 \le y \le 5$.

On note E l'ensemble de ces points M.

1. a. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs (*a* ; *b*) tels que $4a + 3b = 5$.

b. En déduire l'ensemble des points M de E de coordonnées (*x* ; *y*) tels que $-3x' + 4y' = 37$.

2. Soit M un point de l'ensemble E et M′ son image par la transformation *S*.

a. Démontrer que $x' + y'$ est un multiple de 5.

b. Démontrer que $x' - y'$ et $x' + y'$ sont congrus modulo 2.

En déduire que si $x'^2 - y'^2$ est multiple de 2 alors $x' - y'$ et $x' + y'$ le sont également.

c. Déterminer l'ensemble des points M de E tels que : $x'^2 - y'^2 = 20$.

Exercice 4 (7 points)

Pour tout entier naturel n on considère la fonction f_n définie par:

$f_0(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$ **; et pour tout entier $n > 0$:** $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x + x^2}$.

On pose $U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

1.a) Montrer que pour tout entier naturel supérieur à 0, les courbes C_n passent par deux points fixes que l'on déterminera.

b) Etudier la position relative des courbes C_n et C_{n+1} pour $n > 0$.

2.a) Justifier l'existence de U_n sans le calculer.

b) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est décroissante et interpréter graphiquement.

c) Montrer que pour tout $n > 0$: $\frac{1}{3(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que:

Pour tout $n > 0$, $U_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\varphi(x)dx$ où:

$$\varphi(x) = \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} \ .$$

4.a) En utilisant les variations de la fonction φ sur l'intervalle [0,1], montrer que pour tout entier naturel n:

$$1+\frac{1}{n+2} \leq 3(n+1)U_n \leq 1+\frac{3}{n+2} \ .$$

b) En déduire que: $\lim\limits_{n\to+\infty} 3nU_n = 1$.

Sujet 10

Exercice 1 (4 points)

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ et

$$M = \begin{pmatrix} -27 & -25 & -1 & 20 \\ 12 & 0 & 6 & 30 \\ -6 & -50 & 22 & 10 \\ -3 & -75 & -39 & 30 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le produit MB.

2) Sachant que $AM = \lambda I_4$, c'est-à-dire que $AM = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$;

calculer la valeur du nombre réel λ.

3) En déduire la matrice inverse de A.

4) **Résoudre le système suivant :**

$$\begin{cases} -5x + 2y + z + t = 8 \\ x + y - 2z - t = 7 \\ y + 3z - 2t = 9 \\ 2x + 4y - z = 5 \end{cases}$$

Exercice 2 (5 points)

On défini la fonction numérique f par

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2+(m-1)x+2-2m}{x^2-5x+6}$$ **. m est un paramètre réel.**

Soit C_m la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Montrer que f admet un prolongement par continuité g au point $x_0=2$. Déterminer g(x).

2.a) Discuter, suivant les valeurs du paramètre m, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

b) Pour quelles valeurs de m, la fonction f admet un prolongement par continuité h au point $x_0=3$.

3) Etudier suivant les valeurs de m les asymptotes de la courbe C_m.

Exercice 3 (4 points)

On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) $91x+10y=1$.

1.a) Justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).

b) Déterminer une solution particulière de (E).

c) En déduire une solution particulière de l'équation (E') $91x+10y=412$ puis la résoudre.

2) Montrer que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8.

3) On considère l'équation (E'') $A_3x + A_2y = 3296$.

a) Déterminer les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E'').

b) Montrer que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.

Exercice 4 (7 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z) = z^3 - (5+6i)z^2 + (-2+22i)z + 14 - 12i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(1+i)$.

b) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z) = (z-1-i)(z^2+az+b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2) Soient les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1+i, z_B = 1+4i$ et $z_C = 3+i$.

a) Placer les points A, B et C sur le repère.

b) Donner l'expression complexe de la similitude directe f de centre A qui transforme B en C.

c)Déterminer le rapport et un angle de f

d) Donner l'expression complexe de $f\circ f$ et caractériser cette composée.

3) Dans la suite de l'exercice on considère les points M_n tels que $M_0 = B(1;4)$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

a) Calculer z_1 et reconnaitre M_1.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $z_n = 1+i-\frac{9}{2}\left(\frac{-2i}{3}\right)^{n+1}$.

c) Démontrer que tous les points M_n sont situés sur l'une ou l'autre de deux droites que l'on précisera.

d) Démontrer que le triangle $M_{n-1}M_nM_{n+1}$ est rectangle pour tout $n \geq 1$.En déduire un programme de construction géométrique du point M_{n+1} à partir de M_n et M_{n-1} pour tout $n \geq 1$.

e) Sans calculer les affixes, placer les points M_0, M_1 , M_2, M_3 et M_4 sur la figure.

DEUXIEME TRIMESTRE

Sujet 11

EXERCICE 1 (4 POINTS)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(2;1;3)$, $B(3;2;1)$, $C(4;1;4)$, $D(5;3;-2)$ et $E(6;-2;-4)$.

1.a) Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DE}$. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est normal au plan (ABC)

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE).

d) Déterminer les coordonnées du point F projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). Déterminer un réel k tel que $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{DF}$

2.a) Calculer le volume V du tétraèdre $ABCD$. (On rappelle que $V = \frac{1}{3}\text{Base}\times\text{Hauteur}$).

b) Déterminer les deux ensembles Γ_1 et Γ_2 des points M de l'espace définis par :

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow 11MD^2 - ME^2 = -30$$

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MD^2 - ME^2 = -36 .$$

EXERCICE 2 (6 POINTS)

On considère la fonction f définie sur]-1;1[par :

$$h(x) = -1 + \cot\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)$$

1) Montrer que h réalise une bijection de]-1;1[sur $\mathbb{R}$.

2) Soit g la réciproque de h. Montrer que g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{-2}{\pi\left((x+1)^2+1\right)}$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = g(x-1) + g\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f'(x).

b) En déduire que f est constante sur chacun des intervalles]0;+∞[et $]-\infty;0[$.

c) Calculer $f(\frac{-1}{2})$ et $f(\frac{1}{2})$ puis préciser l'expression de f(x) sur $\mathbb{R}^*$. On considère la fonction f définie sur]-1;1[par : $h(x) = -1 + \cot\left(\dfrac{\pi}{2}(x+1)\right)$

1) Montrer que h réalise une bijection de]-1;1[sur $\mathbb{R}$.

2) Soit g la réciproque de h. Montrer que g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{-2}{\pi\left((x+1)^2+1\right)}$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = g(x-1) + g\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f'(x).

b) En déduire que f est constante sur chacun des intervalles]0;+∞[et $]-\infty;0[$.

c) Calculer $f(\frac{-1}{2})$ et $f(\frac{1}{2})$ puis préciser l'expression de f(x) sur $\mathbb{R}^*$.

EXERCICE 3 (3 POINTS)

1) Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel *n*, le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.

2) Trouvez le reste de la division euclidienne de 2014^{2015} par 7.

3) Soit $X = 2011^{2n+1} + 2014^{2n+1}$.

a) Montrez que pour tout entier naturel *n*, X est divisible par 7.

b) Montrez que pour tout entier naturel *n*, X est divisible par 25.

c) X est – il divisible par 175 ? Justifier

EXERCICE 4 (4 POINTS)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC et trois réels α, β, γ de l'intervalle $]0; \pi[$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. On construit à l'extérieur du triangle ABC trois triangles BPC, CQA et ARB tels que $B\widehat{P}C = \alpha$, $C\hat{Q}A = \beta$ et $A\hat{R}B = \gamma$.

1) Construire une figure. Justifier cette construction et montrer que les cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ circonscrits respectivement aux triangles BPC, CQA et ARB ont un point commun que l'on notera I.

2) Soit O_1, O_2, O_3 les centres respectifs des cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

a) Montrer que $(\overrightarrow{O_1O_2};\overrightarrow{O_1O_3}) = (\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}) \quad [\pi]$ b) En déduire que $(\overrightarrow{O_1O_2};\overrightarrow{O_1O_3}) = \alpha \quad [\pi]$.

c) Démontrer que $(\overrightarrow{O_2O_3};\overrightarrow{O_2O_1}) = \beta \quad [\pi]$ et $(\overrightarrow{O_3O_1};\overrightarrow{O_3O_2}) = \gamma \quad [\pi]$.

3) Application :

On suppose que les triangles BPC, CQA et ARB sont équilatéraux. Montrer que le triangle $O_1O_2O_3$ est équilatéral.

EXERCICE 5 (3 POINTS)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

$$E_\alpha \qquad z^2 - 2z\sin\alpha + 1 = 0 \text{ où } \alpha \text{ est un réel donné.}$$

1) Résoudre l'équation E_α et donner les solutions sous formes algébrique et trigonométrique.

2) En déduire l'écriture exponentielle des solutions de l'équation :

$$z^{2n} - 2z^n\sin\alpha + 1 = 0 \text{ où } n \in \mathbb{N}^* \text{ donné.}$$

Sujet 12

EXERCICE 1 (3 POINTS)

1) On considère dans Z^2 l'équation (E) : $4x + 11y = 2018$

a) Montrer que pour tout couple (x, y) solution de (E), y est un nombre pair.

b) Vérifier que le couple (499,2) est une solution particulière de (E).

c) Résoudre (E).

2) On désigne par d le PGCD de x et y où (x, y) est une solution de (E).

a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?

b) Existe – t – il un couple (p, q) d'entiers naturels tels que

$4m + 11d = 2018$, où d désigne le pgcd de p et q, et m leur ppcm ? Justifier.

EXERCICE 2 (4 POINTS)

Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^3 + 3(n+1)x + 1$.

n est un paramètre naturel.

Soit C_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1.a) Montrer que toutes les courbes C_n passent par un point fixe que l'on déterminera.

b) Etudier les positions relatives des courbes C_n et C_{n+1}.

2.a) Dresser le tableau de variation de f_0.

b) En déduire que l'équation $f_0(x)=0$ admet une solution unique U_0 et que $U_0 \in]-1,0[$.

3 .a) Prouver que pour tout entier naturel n, l'équation $f_n(x)=0$ possède une unique solution U_n et que $U_n \in]-1,0[$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante. En déduire qu'elle est convergente.

EXERCICE 3 (4 POINTS)

Soit f la fonction de variable réelle x définie sur $[2,4]$ par

$f(x)=\sqrt{-x^2+6x-8}$.

Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$ puis interpréter graphiquement.

2) Dresser le tableau de variations de f et représenter Γ. Montrer que Γ est un arc d'un cercle C à préciser.

3) On se propose de calculer, par trois méthodes différentes, l'intégrale $I = \int_2^3 \sqrt{-x^2 + 6x - 8}\,dx$.

<u>Méthode a</u> : Donner une interprétation géométrique de l'intégrale $I = \int_2^3 \sqrt{-x^2 + 6x - 8}\,dx$. Donner sa valeur sans calculs de primitives ou d'intégrales.

<u>Méthode b</u> : i) On pose $g(x) = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. Montrer que g réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle que l'on déterminera et montrer que $\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

ii) Calculer la dérivée de la fonction H définie par : $H(x) = (x-3)\sqrt{-x^2 + 6x - 8} + g^{-1}(x-3)$.

iii) Trouver une primitive de f sur l'intervalle $[2, 4]$ et calculer I.

<u>Méthode c</u> : En posant $x = 3 + \cos t$, calculer I et comparer avec les résultats précédents.

EXERCICE 4 (4 POINTS)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z)=z^3-(4-2i)z^2+(4-6i)z-4+8i$.

a) Calculer $P(-2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z)=(z+2i)(z^2+az+b)$$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

2. Soient A, B et C les images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $|z_A|<|z_B|<|z_C|$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O;3),(A;-4),(B;1),(C;2)\}$. Vérifier que A est le barycentre du système $\{(O;5),(B;-5),(G;2)\}$.

c) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que le nombre $\dfrac{z-1-i}{z+2i}$ soit imaginaire pur.

Sujet 13

Exercice 1 (4 points)

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple (13, 3) est solution de cette équation.

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.

On rappelle le petit théorème de Fermat :

si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors a^{p-1} *est congru à 1 modulo p, ce que l'on note* $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

1. Soit x un entier naturel.

Démontrer que si $x \equiv a[7]$ et $x \equiv a[19]$ alors $x \equiv a[133]$.

2. a. On suppose que a n'est pas un multiple de 7.

Démontrer que $a^6 \equiv 1[7]$ puis que $a^{108} \equiv 1[7]$. En déduire que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[7]$.

b. On suppose que a est un multiple de 7. Démontrer que $\left(a^{25}\right)^{g} \equiv a[7]$.

c. On admet que pour tout entier naturel a, $\left(a^{25}\right)^{g} \equiv a[19]$. Démontrer que $\left(a^{25}\right)^{g} \equiv a[133]$.

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application f du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2$.

On note Ω le point d'affixe 1.

1. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(M) = M$.

2. Soit A le point d'affixe $a = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

a. Exprimer a sous forme exponentielle.

b. En déduire les affixes des deux antécédents de A par f.

3. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M′ soit un nombre imaginaire pur.

4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle direct en Ω.

a. Montrer que M est un point de Γ_3 si et seulement si $z^2 - iz - 1 + i = 0$ et $z \neq 1$.

b. En déduire l'ensemble Γ_3 .

5. Soit M un point d'affixe z différente de 0 et de 1.

a. Exprimer $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$ en fonction d'un argument de z.

b. En déduire l'ensemble Γ_4 des points M distincts de O et de Ω tels que O, M et M′ soient alignés.

Exercice 3 (4 points)

Pour tout entier naturel n on pose: $U_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$.

1) Prouver que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (U_n)

.

2.a) En posant $t = \tan x$ calculer $U_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

b) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} + U_n = \frac{1}{2n+1}$ .En déduire U_1 et U_2 .

2.a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et positive. En déduire qu'elle est convergente.

b) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n+1}$ .En déduire $\lim_{n\to\infty} U_n$.

3) Soit (V_n) la suite définie par: $V_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |U_{n+1}| = |V_n - U_0|$. En déduire $\lim_{n\to\infty} V_n$.

4) Pour quelles valeurs de n, V_n est une valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$ à la précision de 10^{-2} ?

Exercice 4 (8 points)

Soit ABCD un quadrilatère convexe direct. On construit quatre carrés de centres respectifs P,Q,R et S qui s'appuient extérieurement sur les côtés [AB],[BC,[CD],[DA].

On considère un repère orthonormal direct $(\mathbf{O},\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}})$ dans lequel les points A, B, C , D , P,Q,R et S ont pour affixes respectives a, b, c , d, p,q,r et s.

1) Le but de cette question est de démontrer que les segments [QS] et [PR] sont perpendiculaires et de même longueur.

a) Faire une figure.

b) Démontrer que dans le carré construit sur [AB] on a: $\mathbf{p} = \dfrac{\mathbf{a - ib}}{\mathbf{1 - i}}$.

c) Etablir des relations analogues pour q,r et s.

d) Calculer $\dfrac{\mathbf{s - q}}{\mathbf{r - p}}$. Conclure.

2) Démontrer que les quadrilatère ABCD et PQRS ont le même centre de gravité.

3) Démontrer que si le quadrilatère PQRS est un carré, alors ABCD est un parallélogramme.

Sujet 14

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. On pose : $P(z) = z^3 - (5+3i)z^2 + (4+12i)z + 4 - 12i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(2)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$.

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. Soient les points A , B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $\mathrm{Im}(z_A) < \mathrm{Im}(z_B) < \mathrm{Im}(z_C)$.

a) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;5),(B;-6),(C;-3)\}$.

b) Placer les points A ,B ,C et G. Montrer que les points G, A , B et C sont cocycliques.

c) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que le nombre $\dfrac{z-2i}{z-3-i}$ soit imaginaire pur.

3. Pour tout point M du plan on pose $\varphi(M) = 5MA^2 - 6MB^2 - 3MC^2$ et Γ_k l'ensemble des points M tels que $\varphi(M) = k$, où k est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de k, la nature de Γ_k .

b) Reconnaître et construire Γ_{-20} .

Exercice 2 (4 points)

Dans le plan, on considère un rectangle ABCD tel que $AB = 2AD = 2a$. Soit le point G tel que $G = \text{bar}\{(A,-2),(B,4),(C,3),(D,3)\}$.

1.a) Montrer que $G = \text{bar}\{(B,2),(C,5),(D,1)\}$.

b) Déterminer des réels a ;b et c tels que $G = \text{bar}\{(A,a),(C,c),(D,d)\}$.

c) On note I le milieu du segment $[AB]$. Montrer que $\overrightarrow{GC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IC}$ et placer G sur la figure.

2) Déterminer ; dans chacun des cas suivants ; l'ensemble des points M du plan :

a) $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \left\| -2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} \right\| = \left\| 4\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} \right\|$

b) $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \left\| 2\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\|$

c) $M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow -2MA^2 + 4MB^2 + 3MC^2 + 3MD^2 = 6a^2$

d) $M \in \Gamma_4 \Leftrightarrow 2MB^2 - 3MC^2 + MD^2 = 2a^2$

e) $M \in \Gamma_5 \Leftrightarrow (-2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$

Exercice 3 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 - x)e^x$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \ \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty .$$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Donner l'équation de la tangente T à (C) au point A d'abscisse 0. Vérifier que A est un point d'inflexion de (C).

d) Tracer la courbe (C).

2) On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel par : $U_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{2}{3}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq U_n \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) Pour tout entier naturel $n \geq 1$; on pose $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^2 (2-x)^n e^x dx$ et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + ... + \frac{2^n}{n!} \ .$$

a) Justifier que $I_1 = e^2 - 3$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq (e^2 - 1)U_n$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

c) En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = I_n - U_{n+1}$.

d) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $e^2 = S_n + I_n$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = e^2$.

Exercice 4 (6 points)

1) On considère la fonction numérique f définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln(x+1) - x\ln x, & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} .$$

a) Montrer que f est continue à droite de zéro.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite de zéro. Donner une interprétation graphique.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Interpréter graphiquement.

2.a) Vérifier que $f''(x)=\dfrac{-1}{x(x+1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Construire la courbe de f.

d) Calculer A_1 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ (On pourra utiliser une intégration par parties).

3) Pour tout entier naturel $n\geq 1$; on pose:

$$\begin{cases} f_n(x)=x^n\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right), & x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases} \text{ et } A_n=\int_0^1 f_n(x)dx .$$

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (A_n).

b) Montrer que pour tout $x\in\left[0,1\right]$, on a $0\leq x^{n-1}f(x)\leq x^{n-1}$ où f est la fonction définie dans la question 1).

c) Justifier que $0\leq A_n\leq\dfrac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

4) On pose $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$.

a) En utilisant une intégration par parties, calculer

$I_1 = \int_0^1 x\ln(x+1)dx$.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$I_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2}I_n \quad .$$

5) Soit n un entier naturel, $n \geq 1$. g_n la fonction définie par :

$$\begin{cases} g_n(x) = -x^n \ln x; \quad x > 0 \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que la fonction g_n est continue sur [0;1].

b) Soit G_n la fonction définie sur [0;1] par :

$$\begin{cases} G_n(t) = -\frac{t^{n+1}\ln t}{n+1} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}; \quad t > 0 \\ G_n(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que G_n est une primitive de g_n sur [0;1].

c) En déduire la valeur de $J_n = \int_0^1 g_n(t)dt$ en fonction de n. Vérifier que $J_1 = \frac{1}{4}$.

6.a) En utilisant 4.a) et 5.c) retrouver la valeur de A_1 calculée en 1.d).

b) Calculer A_2.

Sujet 15

Exercice 1 (3 points)

On considère l'équation (E) : $7x - 2y = 22$, où x et y sont des entiers relatifs.

1.a) Vérifier que $(4,3)$ est une solution particulière de (E).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2.a)Déterminer l'ensemble A des entiers relatifs n tels que $n+2$ divise 11.

b) Déterminer l'ensemble B des couples (x,y) solutions de (E) tels que $\frac{y}{x}$ soit un entier relatif.

Exercice 2 (6 points)

Pour tout z de $\mathbb{C}$ on pose: $P(z) = z^3 - (1+6i)z^2 + (-13+6i)z + 9 + 12i$

1.a) Calculer P(3i).

b) En déduire les nombres complexes z_1 ,z_2 ,z_3 solutions de l'équation $P(z) = 0$ tels que $\text{Re}\, z_1 > \text{Re}\, z_2 > \text{Re}\, z_3$.

2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$; on considère les points A,B et C d'affixes respectives z_1 ,z_2 ,z_3 et le point G barycentre du système $\{(O,4),(A,3),(B,5)\}$.

Pour tout point M du plan on pose: $\varphi(M) = 4MO^2 + 3MA^2 + 5MB^2$.

a) Calculer l'affixe du point G.

b) Vérifier que les points O,A,B et C sont cocycliques. Déterminer le centre et le rayon de leur cercle.

c) Donner une forme réduite de $\varphi(M)$.

3.a)Trouver trois réels α_1 ,α_2 ,α_3 tels que le point C soit barycentre du système $\{(O,\alpha_1),(A,\alpha_2),(B,\alpha_3)\}$.

b) Trouver trois réels β_1 ,β_2 ,β_3 tels que le point A soit barycentre du système $\{(O,\beta_1),(B,\beta_2),(C,\beta_3)\}$.

c) Déterminer puis construire les ensembles Γ_1 ,Γ_2 et Γ_3 des points M du plan définis par :

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow 4MO^2 + 3MA^2 + 5MB^2 = 60$$

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow (4\overrightarrow{MO} - 3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB}).(4\overrightarrow{MO} + 5\overrightarrow{MB} - 6\overrightarrow{MC}) = 0$$

$$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow MA^2 - MC^2 = 10 .$$

Exercice 3 (4 points)

1) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$g(x) = x^2 + \ln x$.

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $]0\,;+\infty[$ une unique solution α. Vérifier que $0{,}6<\alpha<0{,}7$. En déduire le signe de $g(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-\frac{1}{x}(1+\ln x)\,.$$

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-x)$. Interpréter graphiquement.

c) Vérifier que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ et dresser le tableau de variation de f.

d) Construire la courbe représentative de f.

3) Soit f_m la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$f_m(x)=x-\dfrac{m^2}{x}(1+\ln x-\ln m)$, où m est un paramètre réel strictement positif.

a)Montrer que la courbe (C_m) représentatives de f_m dans un repère cartésien est l'image de (C_1) par une transformation géométrique simple h, à préciser.

b) Déduire le tableau de variation de f_m à partir de celui de f.

4.a) Vérifier que pour tout $m\neq 1$, la courbe (C_m) coupe (Ox) en deux points dont l'un a pour abscisse m. L'abscisse de l'autre point sera noté a_m.

b) Calculer, en fonction de m, l'aire A_m du domaine plan limité par la courbe (C_m), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a_m$ et $x = m$.

Exercice 4 (7 points)

On considère la fonction $g(x) = -\ln(1 - xe^{-x})$.

1.a) Montrer que pour tout réel x, on a $e^x > x$. En déduire que le domaine de définition de g est $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Donner une interprétation graphique.

c) Montrer que $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, puis calculer et interpréter graphiquement $\lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x}$.

2.a) Vérifier que $g'(x) = \frac{1 - x}{e^x - x}$ et dresser le tableau de variation de g.

b) Tracer Γ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}.$$

a) Vérifier que $f(x) = e^{g(x)}$.

b) Déduire de la question 1) : $\lim_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Donner une interprétation graphique.

c) Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe Γ' dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

4) Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe Γ', l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Montrer que $1\leq A\leq \dfrac{e}{e-1}$. On ne cherche pas à calculer la valeur exacte de A.

5) Pour tout entier naturel n, on pose: $I_n=\int_0^1 x^n e^{-nx}dx$, pour $n\in\mathbb{N}^*$;

et $I_0=1$

a) Calculer I_1, (On pourra utiliser une intégration par parties).

b) Montrer que pour tout entier naturel $n>1$ on a , $0\leq I_n\leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

6) On pose pour tout entier naturel n : $S_n=I_0+I_1+\ldots+I_n$.

a) Justifier que : $S_n=\int_0^1 \dfrac{1-(xe^{-x})^{n+1}}{1-xe^{-x}}dx$.

b) Montrer que : $A-S_n=\int_0^1 \dfrac{(xe^{-x})^{n+1}}{1-xe^{-x}}dx$.

c) Montrer que : $0\leq A-S_n\leq \dfrac{2}{n+2}$. En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=A$.

d) Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n>n_0$, A soit une valeur approchée de S_n à 10^{-3} près.

Sujet 16

Exercice 1 (3 points)

On considère l'équation (E) :y sont des entiers , où x et $5x+3y=24$

relatifs.

1.a) Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple $(6,-2)$ est une solution particulière de (E).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2) Soit (x,y) une solution de (E).

a) Montrer que si y est un diviseur de x, alors y est un diviseur de 24.

b) Soit k un entier relatif. Trouver les valeurs de k telles que le quotient $\frac{6+3k}{2+5k}$ soit un entier relatif.

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$P(z)=z^3-(2+6i)z^2-11z-8+6i$$

a) Calculer $P(2i)$.

b) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$$

c) Soient les points A , B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $\mathrm{Im}(z_A)<\mathrm{Im}(z_B)<\mathrm{Im}(z_C)$. Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$ et placer les points A ,B ,C et G.

2) Pour tout réel k différent de 4, on définit l'application f_k du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+(5-k)\overrightarrow{MC}\ .$$

a) Pour quelles valeurs de k, l'application f_k est une translation? Déterminer alors son vecteur.

b) On suppose que $k\in\mathbb{R}\setminus\{4;5\}$. Montrer que f_k admet un unique point invariant Ω_k . Reconnaître alors f_k et donner ses éléments caractéristiques en fonction de k.

c) Déterminer et construire le lieu géométrique des points Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R}\setminus\{4;5\}$.

3) Pour tout point M du plan on pose $\varphi(M)=2MA^2-2MB^2+2MC^2$ et Γ_m l'ensemble des points M tels que $\varphi(M)=m$, où m est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de m, la nature de Γ_m .

b) Déterminer et construire Γ_m pour $m=36$.

Exercice 3 (6 points)

Dans l'espace, muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points

$A(1;-2;3)$, $B(4;1;0)$, $C(3;0;-2)$ et $D(2;1;-2)$

1. a) Calculer les produits scalaires suivants $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$.

b) Justifier que B est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) .

c) En déduire le volume du tétraèdre ABCD.

2. a) Donner une équation cartésienne du plan (ACD).

b) Calculer la distance du point B par rapport au plan (ACD) et en déduire l'aire du triangle ACD.

Exercice 4 (7 points)

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par :

$f_n(x) = \dfrac{e^{nx}}{e^x + 1}$ et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe à déterminer.

2) Dresser le tableau de variation de f_0.

3.a) Montrer que les courbes (C_0) et (C_1) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

b) Déduire le tableau de variation de f_1

c) Construire (C_0) et (C_1) dans le même repère.

4) On suppose que n est strictement supérieur à 1.

a) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$.

Interpréter.

b) Calculer f_n' et dresser le tableau de variation de f_n.

5) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx,\ \ n \in \mathbb{N}$.

a) Justifier l'existence de (u_n) puis calculer u_0.

b) Vérifier que $u_0 + u_1 = 1$ et que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{e^n - 1}{n}$ puis

déduire u_1 et u_2.

TROISIEME TRIMESTRE

Sujet 17

Exercice 1 (3 points)

Soit x et y des entiers relatifs. On pose $f(x,y) = 3x - 4y$

1.a) Calculer $f(7,5)$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $3x - 4y = 1$.

2) Pour tout entier naturel *n* on pose $X_n = f(7^n, 5^n)$.

Trouver, suivant les valeurs de *n*, le reste de la division euclidienne de X_n par 11.

Exercice 2 (5 points)

Pour tout nombre complexe z on pose :

$$P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + (1-2i)z - 2i.$$

1) Calculer $P(2i)$ est déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2 de l'équation $P(z) = 0$ sachant que $\operatorname{Im} z_0 \geq \operatorname{Im} z_1 \geq \operatorname{Im} z_2$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2. On pose $z' = f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z + 1}$. On note M et M' les points d'affixes respectives z et z'.

a) Vérifier qu'une équation cartésienne de la droite (BC) est $2x + 1 = 0$

b) Démontrer que si M décrit la droite (BC) privée de B et C, alors M' est situé sur l'axe des abscisses (On pourra remarquer que $z^2 + z + 1 = \left(z + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$).

3.a) Démontrer que si $|z|=1$, alors $f(z)=\frac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$.

b) Vérifier que si $z=e^{i\theta}$ avec $\theta\in[-\pi;\pi]\setminus\left\{\frac{-2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right\}$, alors

$f(z)=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$.

4.a) Démontrer que si M décrit le cercle d'unité privé de A et C, alors M' est situé sur la courbe Γ d'équation cartésienne $x^2+y^2=(2x-1)^2$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Démontrer que Γ est une hyperbole. Déterminer le centre et les sommets puis calculer l'excentricité de Γ. Construire Γ dans le repère précédent.

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté on considère un carré direct $ABCD$ de centre O et de coté a, $(a>0)$. Soient K et L les milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[DA]$.

1) Faire une figure illustrant les données précédentes.

2) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en B et K en L. Préciser le centre et un angle de r.

3.a) Prouver qu'il existe une unique similitude directe f_1 qui transforme D en L et B en O. Déterminer le rapport et un angle de f_1.

b) Soit P le centre de la similitude f_1. Vérifier que le point P est commun aux cercles de diamètres $[AB]$ et $[OD]$ puis le préciser. Vérifier que P est aussi le point d'intersection des deux droites (BL) et (AK).

4.a) Soit f_2 la similitude directe qui transforme B en D et O en L. Préciser son angle et son rapport.

b) Montrer que le centre de la similitude f_2 est le point P : même centre de f_1.

5.a) Soit $h = f_1 \circ f_2$. Montrer que h est une homothétie dont on précisera le centre est le rapport. En déduire deux réels β et γ tels que $P = \text{bar}\{(B,\beta);(L,\gamma)\}$.

b) Déterminer deux réels α et λ tels que $P = \text{bar}\{(A,\alpha);(K,\lambda)\}$.

Exercice 4 (7 points)

1° On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right);x\leq 0 \\ f(x)=1-e^{-x};x\geq 0 \end{cases}$$

. On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'unité graphique 2 cm .

a) Montrer que f est continue, dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2° a) Etudier les variations de la fonction u définie sur $]-1,+\infty[$ par : $u(x)=f(x)\text{-}x$

b) Déduire la position de Γ par rapport à la droite (D) : $y=x$. Tracer Γ et (D).

3° a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Soit g la fonction réciproque de f. Expliciter $g(x)$ pour tout x de J. Tracer la courbe Γ' de g dans le même repère.

c) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par Γ , Γ' et les droites $x=1$ et $y=1$.

4° On pose pour tout $n\geq 1$: $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{3\times 2^3}+\frac{1}{5\times 2^5}+...+\frac{1}{(2n-1)\times 2^{2n-1}}$

et $R_n=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{x^{2n}}{1-x^2}dx$

a) Montrer que pour tout $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$ on a : $x^{2n}\leq\frac{x^{2n}}{1-x^2}\leq\frac{4x^{2n}}{3}$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 1$ on a :

$$\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} \leq R_n \leq \frac{1}{3(2n+1)2^{2n-1}}.$$ **Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n$.**

5° a) Montrer que pour tout $x \in]-1,0]$ on a :

$$f'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2} + \frac{x^{2n}}{1-x^2}.$$

b) En déduire que (S_n) est convergente et calculer sa limite.

6° Soit n un entier naturel non nul on pose : $u_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ et

$$I_n = \int_0^{1-\frac{1}{n}} g(x)\,dx$$

Vérifier que pour tout $n \geq 2$ on a : $u_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)!}}$. En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a : $\ln u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$

7° a) Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n-2$ on a :

$$\frac{1}{n}g\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(x)\,dx \leq \frac{1}{n}g\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

b) En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a : $\ln u_n + \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq I_n \leq \ln u_n$

8° a) Calculer I_n en fonction de n .(on remarquera que pour $x \neq 1$:

$$\frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{n} \leq \ln u_n \leq 1 - \dfrac{1}{n}$.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Sujet 18

Exercice 1 (3 points)

On considère l'équation (E) :, où x et y sont des entiers $11x-7y=25$ relatifs.

1.a) Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple $(8,9)$ est une solution particulière de (E).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2) Soit (x,y) une solution de (E).

a) Montrer que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 25.

b) Soit m un entier relatif. Existe-t il des valeurs de m telles que le quotient $\dfrac{20+11m}{15+7m}$ soit un entier relatif ?

Exercice 2 (4 points)

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(2\sin\theta+i)z^2+(1+2i\sin\theta)z-i$ où $\theta\in[0;2\pi[$.

1) Calculer $P(i)$ puis déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2 de l'équation $P(z)=0$ sachant que z_0 est imaginaire pur, et $\operatorname{Im} z_1\geq 0$ si $\cos\theta\geq 0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2

Déterminer, lorsque θ décrit l'intervalle $[0;2\pi[$, le lieu géométrique Γ des points M_1 et M_2.

a) Calculer l'aire du triangle $M_0M_1M_2$ en fonction de θ.

b) Pour quelles valeurs de θ l'aire $A(\theta)$ est maximale ? Justifier.

c) Pour quelles valeurs de θ le quadrilatère $OM_0M_1M_2$ est un parallélogramme.

3.a) On suppose que $\theta = \frac{\pi}{6}$. Placer les points M_0, M_1 et M_2 sur le repère.

b) Déterminer puis construire l'ensemble Γ' des points M du plan tels que : $MM_0^2 - MM_1^2 + MM_2^2 = 1$

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère le carré direct $ABCD$ de centre O et de coté a ($a > 0$).

I, J, K et L les milieux respectifs des cotés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure.

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme B en O et J en L.

c) Déterminer un angle et le centre de cette rotation.

2) Soit $f = r \circ S_{BC}$

a) Vérifier que $f = S_{IJ} \circ S_{AB} \circ S_{BC}$ et déterminer $f(B)$ et $f(J)$.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f et donner sa forme réduite.

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s_1 qui transforme I en O et B en C.

b) Déterminer un angle et le rapport de s_1.

c) Déterminer $s_1(A)$ que peut-on en déduire à propos du centre de s_1

d) Déterminer $s_1(O)$ puis construire l'image du carré ABCD par s_1. Justifier la construction.

4) Soit s_2 la similitude directe qui transforme C en L et D en I.

a) Déterminer un angle et le rapport de s_2.

b) Déterminer l'image du triangle OCD par s_2. Que peut on déduire ?

c) On pose $f = s_2 \circ s_1$. Déterminer $f(B)$ et caractériser f.

5.a) Vérifier que O est le barycentre du système $\{(C,1);(L,2);(D,-1)\}$.

b) Déterminer et construire les ensembles Γ_1 et Γ_2 des points M du plan tels que :

$\mathbf{M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow MC^2 + 2ML^2 - MD^2 = a^2}$,

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{ML} - \overrightarrow{MJ} + 2\overrightarrow{MK})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MK}) = 0$.

c) Déterminer deux homothéties transformant Γ_1 en Γ_2.

Exercice 4(4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère dans un repère orthonormé.

1.a) Justifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera. Donner l'expression de sa réciproque $f^{-1}(x)$. On note (C') la courbe de f^{-1} dans le même repère.

b) Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en un seul point d'abscisse α telle que $0,4 < \alpha < 0,5$.

3) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^\alpha f^n(t)dt$ où α est le réel trouvé en 2.b)

a) Justifier que $I_1 = \alpha + \ln(2\alpha)$.

b) Vérifier que pour tout réel x : $f'(x) = f^2(x) - f(x)$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} - I_n = \dfrac{1}{n}\left(\alpha^n - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

d) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. Que peut on en déduire ?

4.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n$.

b) Montrer que $I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$.En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$.

Exercice 5 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{6}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.a) Vérifier que f est impaire et que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ trois solutions dont l'une α vérifie $2,8 < \alpha < 2,9$

2.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on déterminera.

b) Vérifier que pour tout réel x : $(f(x))^2-(f'(x))^2=-\frac{1}{9}$. En déduire l'expression de $(f^{-1})'(x)$.

c) Soit x un réel quelconque. Exprimer l'intégrale $I(x)=\int_0^x \frac{3}{\sqrt{9t^2+1}}dt$ en fonction de $(f^{-1})(x)$.

3) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Pour tout point M(x,y) on note $r(M)=M'$ et $r(C)=C_1$

a) Donner l'expression complexe de la rotation r puis écrire les coordonnées x',y' de M' en fonction de x et y.

b) Montrer que (C_1) est la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=\ln(-3x+\sqrt{9x^2+1}).$$

c) Montrer que pour tout réel x , $h(-x)=f^{-1}(x)$. On note (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le repère précédent.

4.a) Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en deux points autres que l'origine.

b) Construire, dans le même repère les courbes (C) et (C') et calculer en fonction de α l'aire du domaine plan délimité par ces deux courbes (α est le nombre indiqué en 1.d).

Sujet 19

Exercice 1 (4 points)

1° a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $17x - 7y = -3$.

b) On considère un entier naturel A tel que: $A \equiv 9\ [17]$ et $A \equiv 6\ [7]$

Déterminer les valeurs possibles de A .

c) Déterminer A sachant que $1896 < A < 2134$;

2° a) Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.

b) Démontrer que pour tout n, le nombre $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.

En déduire que 3^{n+6} et 3^n ont le même reste dans la division euclidienne par 7.

c) A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{2015} par 7.

d) De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?

e) En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.

3° Soit $u_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}$.

a) Montrer que $u_n = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)$

b) Déterminer les valeurs de n telles que u_n soit divisible par 7.

c) Déterminer tous les diviseurs de u_6.

Exercice 2 (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC équilatéral direct de centre O et de côté a,

$(a > 0)$. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$

1° a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre la droite (AB) horizontale)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme A en B et C en A.

c) Déterminer un angle de r_1 et préciser son centre.

2° On considère la rotation r_2 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer $r_1 o r_2 (B)$ et caractériser $r_1 o r_2$.

3° On considère les points D et E symétriques respectifs de I par rapport à J et K.

a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme A en K et J en E.

b) Justifier que g est une symétrie glissante. Déterminer $g(D)$ et donner la forme réduite de g.

4° a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s_1 qui transforme B en I et C en J.

b) Déterminer le rapport et un angle de s_1. Justifier que O est le centre de s_1.

5° Soit s_2 la similitude directe qui transforme C en J et K en A.

a) Donner un angle et le rapport de s_2.

b) Déterminer le centre de s_2.

c) Déterminer $s_2 \circ s_1(A)$. Caractériser $s_2 \circ s_1$.

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par E et O_1 les symétriques respectifs de A et O par rapport à la droite (BC)

1° a) Soit r la rotation définie par $r(B)=C$ et $r(C)=D$. Préciser l'angle et le centre de r.

b) Soit $f=r\circ S_{(OO_1)}$. Déterminer $f(C)$ et $f(A)$ puis caractériser f.

2° On désigne par g l'antidéplacement défini par $g(D)=B$ et $g(O)=O_1$. Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite.

3°) Soit S la similitude directe telle que $S(A)=B$ et $S(E)=C$

a) Déterminer l'angle et le rapport de S. Construire son centre Ω.

b) Déterminer $r^{-1}\circ S(A)$, puis montrer que $r^{-1}\circ S$ est une homothétie que l'on caractérisera.

c) Montrer que $S((CE))=(CA)$, en déduire que $S(C)=O$.

d) Montrer que Ω , O et E sont alignés.

4°) Soit S' la similitude directe de centre C, qui transforme B en A.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S'.

b) Déterminer $S'\circ S'\circ S(E)$ puis caractériser $S'\circ S'\circ S$.

Exercice 4 (7 points)

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=\frac{1}{x^2}+1-4\ln x$.

1° a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α et que $1.4<\alpha<1.5$.

c) En déduire le signe de $g(x)$.

2° On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}$.

a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $f'(x)=\frac{xg(x)}{(1+x^2)^3}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3° a) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe C_f en son point d'abscisse 1.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$. En déduire que :

$$f(x) - \frac{1}{4}(x-1) \leq (x-1)\left[\frac{4-(1+x^2)^2}{4(1+x^2)^2}\right] .$$

c) Déterminer la position relative de C_f et (T) (on pourra distinguer les cas $x \leq 1$ et $x > 1$).

d) Tracer (T) et C_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On prendra $\alpha = 1.45$ et $f(\alpha) = 0.04$.

4° Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)\,dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $F'(x) = \dfrac{(1-x^2)\ln x}{(1+x^2)^2}$.

b) Soit h la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x) = \tan x$. Montrer que h est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$.

c) Montrer que h^{-1} est dérivable $[0,+\infty[$ et que : $(h^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

d) Montrer que pour tout $x > 0$: $F(x) = \dfrac{1}{2}\left[h^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) - h^{-1}(x)\right] + \dfrac{x\ln x}{1+x^2}$

e) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x)$. Dresser le tableau de variation de F .

f) Soit G la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $G(x) = F(x)$ si $x > 0$, $G(0) = \dfrac{\pi}{4}$. Montrer que G est un prolongement continu de F en 0 et donner l'allure de la courbe Γ de G .

Sujet 20

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z)=z^3-(6+5i)z^2+(1+20i)z+14-5i$ où z est un nombre complexe.

a) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution imaginaire pure.

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

2) On considère les points A,B et C d'affixes respectives $z_A=i$, $z_B=4+i$ et $z_c=2+3i$. Pour tout point M du plan on pose $\phi(M)=3MA^2-2MB^2+MC^2$ et Γ_k l'ensemble des points M tels que $\phi(M)=k$, où k est un réel.

a) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;3),(B;-2),(C;1)\}$

b) Vérifier que $\phi(G)=-44$ puis discuter suivant les valeurs de k, la nature de Γ_k .

c) Déterminer et construire Γ_{56} .

3) Soit f l'application qui à tout point $M(x,y)$ d'affixe z associe le point $M'(x',y')$ d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{3z - \overline{z}}{4}$;($\overline{z}$ est le conjugué de z) et soit Γ le cercle d'équation $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 50$.

a) Ecrire x' et y' en fonction de x et y.

b) Donner une équation cartésienne de l'ensemble Γ' image du cercle par l'application f.

c) Montrer que Γ' est une ellipse dont on déterminera le centre, les sommets et l'excentricité.

d) Représenter Γ et Γ' sur la figure précédente.

Exercice 2 (5 points)

On se propose dans cet exercice de calculer la limite de la suite numérique de terme général $U_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}, n \geq 2$.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2\ln x$.

1) Dresser le tableau de variation de f et vérifier que f est strictement décroissante sur $]0,1]$.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$; On pose $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)dx$.

a) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_\lambda^1 \ln x dx$.

b) En déduire le calcul de $I(\lambda)$ puis $\lim_{\lambda\to 0^+} I(\lambda)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$ on pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$.

a) Montrer que : $\frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$; pour $1 \leq k \leq n-1$.

b) En déduire que : $S_n - \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) \leq I(\frac{1}{n}) \leq S_n$ puis que : $I(\frac{1}{n}) \leq S_n \leq I(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}f(\frac{1}{n})$.

c) En utilisant 2.b) et 3.b) montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{7}{3}$.

4.a) Montrer que : $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) En déduire que : $S_n = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} - 2\ln U_n$. Déduire de ce qui précède $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 3(5 points)

1.a)Trouver la solution générale de l'équation différentielle $y''-2y'+y=0$.

b) Donner la solution particulière dont la courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ admet la droite d'équation $y=x$ comme tangente à l'origine O.

2) Soit la fonction paramétrique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=x^n e^x$. n est un entier naturel $n\geq 1$.

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes que l'on déterminera.

b) Etudier les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}).

3.a) Etudier la fonction $f(x)=f_1(x)=xe^x$ et dresser son tableau de variation. Tracer la courbe (C_1).

b) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_1), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

4) On considère la suite numérique (I_n) définie pour tout entier naturel $n\geq 1$ par $I_n=(-1)^n\int_0^1 x^n e^x dx$.

a) Montrer que $I_1=-1$

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

c) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) I_n$.

d) En déduire le calcul de l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{(2x^3 + 5x^2 - x - 4)e^x}{x+1} dx$.

Donner la valeur de J sous la forme $ae + b$ où a et b sont des entiers relatifs.

Exercice 4 (5 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct ABC de centre O et de coté $a, (a > 0)$. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes (on prendra (AB) horizontale).

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme B en C et J en K. Caractériser r_1.

c) Soit la rotation r_2 qui transforme B en C et K en J. Préciser le centre et un angle de r_2.

2.a) Soit $f = r_1 \circ r_2$ et $g = r_2 \circ r_1$. Caractériser f et g.

b) Montrer que $g \circ f = t_{\overrightarrow{BC}}$ où $t_{\overrightarrow{BC}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

c) Pour tout point M du plan on note $f(M) = M_1$ et $g(M) = M_2$. Montrer que les quadrilatères MBM_1A et MCM_2A sont des parallélogrammes.

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme B en I et C en J. Déterminer l'angle et le rapport de s.

b) Déterminer $s(A)$ et $s(O)$.

c) Caractériser la composée $h = r_1 \circ s$.

4) Soit Γ l'ellipse de foyers I et J passant par C.

a) Montrer que $K \in \Gamma$.

b) Construire les sommets de Γ. Justifier la construction.

5) On muni le plan d'un repère orthonormé direct $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$ tel que Ω est le milieu de $[IJ]$ et $\overrightarrow{\Omega I} = \frac{1}{4}a\vec{u}$ où a est la longueur du coté du triangle ABC.

a) Donner une équation cartésienne de Γ dans le repère $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$.

b) Montrer que l'excentricité de Γ est $e = \frac{1}{2}$.

Sujet 21

Exercice 1 (3 points)

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité *p* de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle [0 ; $+\infty$ [: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de *t* semaines est $p([0\ ;\ t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$. Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0\ ;\ 200[) = 0{,}5$.

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.

2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand *A* tend vers $+\infty$ de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx$.

a. Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = \dfrac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

b. En déduire d_m ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

Exercice 2(4 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i = 0$

1.a) Vérifier que $z_0 = 2i$ est une solution de l'équation (E) puis résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

b) Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E)

.

2) Soit θ un réel et E_θ l'équation :

$$z^3 - 2e^{i\theta}(\sqrt{3} + i)z^2 + 4e^{2i\theta}(1 + i\sqrt{3})z - 8ie^{3i\theta} = 0$$

a) Démontrer que $(ze^{-i\theta})$ est une solution de (E) si et seulement si z est une solution de E_θ.

b) En déduire les solutions de l'équation (F) :

$z^3 + 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z + 8i = 0$.

3) pour $z \in \mathbb{C} - \{-i\}$; on pose $f(z) = \frac{z}{z+i}$.

a) montrer que $f(e^{i\alpha}) = \frac{1}{2}(1 + i\tan\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right))$.

b) Montrer que si $f(z) = e^{i\theta}$ alors $z = -\frac{1}{2}(\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) + i)$

c)En déduire une écriture algébrique des solutions de l'équation : $z^4 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})(z + i)^4$

Exercice 3 (4 points)

Dans le plan orienté on considère un rectangle direct ABCD tel que $AB = 1$ et $BC = 2$. On appelle M le milieu du segment [BC]

, N le milieu du segment $[AD]$ et E le symétrique de M par rapport à N

1)Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure.

2-a) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme B en N et M en E.

b) Préciser l'angle et le centre de r

c) On pose $f = S_{MN} \circ r$ determiner $f(A)$ et $f(B)$ puis déterminer la nature de f et la caractériser.

3) Soit S la similitude directe telle que : $S(A) = M$ et $S(B) = D$. Déterminer le rapport et l'angle de S.

4) On se propose dans cette question de préciser la position du centre P de la similitude S.

a) Les droites (AB) (DM) se coupent en I. Démontrer que les points A ,P,M et I sont cocycliques . En déduire que :

$BM = BP = BA$.

b) Démontrer que $DM = DP$. En déduire que P est le symétrique de M par rapport à la droite (BD).

5) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct tel que

$z_A = 0$, $z_B = 1$ et $z_D = 2i$.

a) Déterminer l'expression complexes de S et l'affixe de P.

b) Vérifier que P est bien le symétrique de M par rapport à la droite (BD) en montrant que

$BM = BP$ et que les droites (PM) et (BD) sont orthogonaux.

6) pour tout entier naturel. On définit une suite de points (L_n)

par : $L_0 = D$ $\quad L_{n+1} = S'(L_n)$ où S'

est la réciproque de S . On pose

$$d_n = L_0L_1 + L_1L_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots + L_nL_{n+1},\ n \in \mathbb{N}.$$

a) Placer les points L_0, L_1, L_2 et donner une expression simple de d_n

b) Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et l'interpréter.

c) Montrer que les points P, L_2, L_{2018} sont alignés

Exercice 4 (3 points)

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{1+\ln x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1.a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0^+.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Tracer la courbe C_f dans un repère orthonormé$(O, \vec{i}\ \ \vec{j})$.

2) On cherche à calculer l'intégrale : $L = \int_1^e \frac{1}{t}\big(f(t)\big)^3 dt$

a) Calculer les intégrales : $I = \int_1^e \frac{dt}{t(1+\ln t)}$ et $J = \int_1^e \frac{dt}{t(1+\ln t)^2}$

b) Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\big(f(t)\big)^2 = a + \frac{b}{1+\ln t} + \frac{c}{(1+\ln t)^2}$$

c) Calculer l'intégrale : $K = \int_1^e \frac{1}{t}\left(f(t)\right)^2 dt$

d) En utilisant une intégration par parties montrer que :

$L = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2}K$. Calculer L.

Exercice 5 (6 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f_n(x) = (1-x)^n e^x$.

C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

L'unité graphique est 2cm.

Partie A

1)- Montrer que toutes les courbes C_n passent par deux points fixes A et B dont on précisera les coordonnées .

2)-a) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = 0$

b) Etudier suivant la parité de n , $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x}$.

3)- a) Dresser le tableau de variation de f_1 et de f_2

b)- Etudier la position relative de C_1 et C_2

c)- Tracer C_1 et C_2 dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4) a) On pose : $G(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$.Déterminer les réels a, b et c tels que G soit une primitive

de $f_1 - f_2$ sur $\mathbb{R}$

b)-Calculer l'aire du domaine plan limité par les courbes C_1 et C_2 et les droites $x = 0$ et $x = 1$

Partie B

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, On pose : $\varphi_n(x) = \int_0^{1-\frac{x}{2}} f_n(t)dt$

1) a)- Calculer $\varphi_1(x)$ au moyen d'une intégration par parties.

b)-Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_1(x) = -2$

c)- En intégrant par parties $\varphi_{n+1}(x)$ montrer que : $\varphi_{n+1}(x) = (n+1)\varphi_n(x) - 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} ee^{-\frac{x}{2}}$

d)-Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} ee^{-\frac{x}{2}} = 0$

2)a)- Montrer par récurrence φ_n admet en $+\infty$ une limite finie L_n et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $L_{n+1} = -1 + (n+1)L_n$

b) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $L_n = -n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = \frac{\varphi_n(0)}{n!}$

a) Calculer ! U_1

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_{n+1} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}$

c) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq U_n \leq \frac{e}{n\,!}$

e)En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Sujet 22

Exercice 1 (3 points)

On admet que 13% d'enfants, moins de 12 ans, d'une ville, ont eu dans leur vie une crise d'asthme. Les services sanitaires de la ville décident de réaliser une étude et d'évaluer la proportion d'enfants moins de 12 ans ayant déjà eu des crises d'asthme. Ils sélectionnent de manière aléatoire 100 enfants moins de 12 ans. Le medecin responsable a pris la décision suivante : si la proportion observée est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% alors une investigation plus complète sera mise en place afin de rechercher les facteurs de risque pouvant expliquer cette proportion élevée.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion d'enfants moins de 12 ans ayant eu une crise d'asthme dans un échantillon de taille 100.

2) L'étude réalisée auprès des 100 personnes a dénombré 19 enfants moins de 12 ans ayant déjà eu des crises d'asthme. Que pouvez-vous conclure ?

3) Le médecin n'est pas convaincu par cette conclusion et déclare que le nombre de personnes interrogées était insuffisant pour mettre en évidence qu'il y avait plus d'enfants ayant eu des crises d'asthme que dans le reste du pays. Combien faudrait-il prendre de personnes pour qu'une proportion observée de 19% soit en dehors de l'intervalle de fluctuation asymptotique ?

Exercice 2 (3 points)

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$**.**

On considère le plan P d'équation 3x+4z-5=0 , et l'ensemble de Γ **des points du plan (xOy) équidistants du plan P et de l'origine O.**

1° Calculer la distance au plan P d'un point M_0 **de E de coordonnées** (x_0,y_0,z_0)**. En déduire que** Γ **admet pour équation dans** $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ **:**

$$x^2+y^2=\left(\frac{3x-5}{5}\right)^2$$

2° Montrer que Γ **est une conique de foyer O et de directrice D, d'intersection des plans P et (xOy). Déterminer son excentricité.**

3° Préciser la nature, le centre et les sommets de (les coordonnées seront données dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ **du plan (xOy) . Représenter** Γ **dans ce repère.**

Exercice 3 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z) = z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i)z - 12 - 60i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(2+2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z) = (z-2-2i)(z^2+az+b).$$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

c) Soient les points A , B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $\mathrm{Im}(z_A) < \mathrm{Im}(z_B) < \mathrm{Im}(z_C)$. Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;2),(B;-3),(C;3)\}$ et placer les points A ,B ,C et G.

2) Pour tout point M du plan on pose $\varphi(M) = 2MA^2 - 3MB^2 + 3MC^2$ et Γ_m l'ensemble des points M tels que $\varphi(M) = m$, où m est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de m, la nature de Γ_m.

b) Reconnaître et tracer Γ_{60}.

Exercice 4 (4 points)

Dans le plan orienté on considère un rectangle direct ABCD de longueur AD tel que AB=a et AD=2a, $(a>0)$. Soient I , J, K et L

les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Soit O le centre du rectangle $ABCD$.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes.

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme B en L et A en D. Préciser le centre et un angle de r.

2.a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme I en D et B en K.

b) Montrer que g est une symétrie glissante et vérifier que $g(J) = O$.

c) Donner la forme réduite de g.

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme A en C et B en L. Déterminer l'angle et le rapport de s. Montrer que $s(J) = B$.

b) Soient Γ_1 le cercle de centre A passant par B, et Γ_2 le cercle de centre C passant par L. Justifier que $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

4) On désigne par P le centre de s.

a) Montrer que P est situé sur les cercles Γ_1 et Γ_2. Préciser P.

b) Vérifier que P est le symétrique de L par rapport à (AC).

c) Soit E le symétrique de L par rapport à D. Vérifier que P est situé sur la droite (BE).

5.a) Soit R le symétrique de L par rapport à J. Montrer que $s(L) = R$

b) Soit M un point de Γ_1 distinct de P. On note $s(M') = M''$.

Montrer que :

i) La droite (MM') passe par un point fixe que l'on précisera.

ii) Le triangle MM'M'' est rectangle isocèle.

c) Soit Q le point diamétralement opposé à P sur le cercle Γ_1. Calculer en fonction de a l'aire du triangle MM'M'' pour chacune des positions suivantes du point M :

i) M est en B ;

ii) M est en L ;

iii) M est en Q.

Exercice 5 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Montrer que $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Interpréter.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on donnera les coordonnées.

d) Tracer la courbe (C).

2. a) Calculer $\int_0^x \ln(1+t)dt$ et déterminer la primitive F de f sur $]-1,+\infty[$

qui s'annule en 0 (On pourra écrire $f(x)=\ln(x+1)-1+\frac{1}{x+1}$).

b) Pour tout entier naturel $n\geq 1$, on note A_n l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\frac{1}{n}$. Donner l'expression de A_n en fonction de n.

3.a) Trouver l'expression de la fonction f_m dont la courbe représentative (C_m) est l'image de (C) par l'homothétie de centre l'origine O(0,0) et de rapport m où m est un réel strictement positif.

b) Justifier que les courbes (C_m) ont un point commun à déterminer.

c) Justifier que les points d'inflexion des courbes (C_m) sont alignés.

4) Dans la suite de l'exercice on prendra x réel tel que $x\in\left]0;1\right[$ et n un entier naturel non nul.

a) Montrer que pour tout n: $\frac{1}{1+x}=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}x^{k-1}+\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$.

b) En déduire que : $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt$.

c) En utilisant a) et b) ; montrer que :

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1-k}{k}x^k+\frac{(-1)^{n+2}x^{n+2}}{x+1}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt.$$

d) Montrer que : $0\leq\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt\leq\frac{x^{n+2}}{n+2}$.

e) En déduire que : $f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1-k}{k}x^k$.

Sujet 23

Exercice 1 (3 points)

Entre les deux tours d'une élection municipale, il ne reste que deux candidats A et B en lice. Lors d'un débat télévisé, A affirme sur la foi d'un sondage secret que si l'élection avait lieu maintenant, il gagnerait largement avec 60% des voix. Avant la fin du débat, B fait effectuer un sondage par téléphone auprès de 200 personnes en âge de voter. Le résultat donne 104 personnes en faveur de A.

1) En supposant que le sondage secret reflète fidèlement l'opinion des électeurs le jour du débat, donner l'intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence des personnes favorables à A sur un échantillon de 200 personnes.

2) Que peut-on dire suite au résultat du sondage demandé par B ?

3) Reprendre les deux questions avec un intervalle de fluctuation au seuil de 98%.

Exercice 2 (3 points)

Une substance se dissout dans l'eau. On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute (quantité restante).

À l'instant t = 0 (t en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau. On observe que les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes.

On note f(t) la quantité dissoute après t minutes, en grammes.

1) Justifier que $f(t)=20e^{\frac{-\ln 2}{5}t}$

2) Combien de temps faut-il encore attendre pour qu'il reste seulement 2g ?

Exercice 3 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(9-i)z^2+(28-5i)z-32+4i$

1.a) Calculer $P(4)$ et déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z-4)(z^2+az+b)$

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$.

2) On considère les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ tels que $z_A=4$, $\operatorname{Im} z_B>0$ et $\operatorname{Im} z_C<0$.

a) Donner l'expression complexe de la similitude directe s de centre C qui transforme A en B.

b) Déterminer le rapport et un angle de s.

3) Pour tout nombre complexe z on pose :

$$Q(z)=z^2-(5-i)z+8-i\ .$$

On note Γ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Q(z)$ soit imaginaire pur (ou nul).

a) En posant $z = x + iy$, donner une équation cartésienne de Γ et montrer que Γ est une hyperbole de centre $\Omega(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$.

b) Préciser les sommets et les asymptotes de Γ puis la construire.

Exercice 4 (5 points)

Dans le plan orienté on considère un carré direct $ABCD$ de coté a, $(a > 0)$.

Soient E et F les symétriques respectifs des points C et B par rapport à (AD). Soit G le point tel que le triangle DBG soit équilatéral direct. Soient I et J les milieux respectifs des segments $[DB]$ et $[DF]$.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure.

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme D en G et F en B. Préciser l'angle et le centre de r_1.

c) Soit la rotation r_2 qui transforme G en E et B en A. Préciser l'angle et le centre de r_2.

d) On pose $r = r_2 \circ r_1$. Déterminer $r(D)$ et $r(F)$. Caractériser r.

2. On considère l'homothétie h de centre B et de rapport $k = \frac{1}{2}$.

On note $s = h \circ r$.

a) Montrer que s est une similitude directe. Préciser le rapport et un angle de s.

b) Soit Ω le centre de s. Montrer que Ω appartient à deux cercles Γ_1 et Γ_2 que l'on déterminera.

c) Déterminer deux réels α et β tels que Ω soit le barycentre du système $\{(E,\alpha);(I,\beta)\}$. Placer Ω sur la figure.

3. On considère l'ensemble Γ des points M du plan tels que $MA + ME = 2a$ où a est la longueur du coté du carré $ABCD$.

a) Montrer que Γ est une ellipse passant par D.

b) Préciser les sommets, les longueurs des axes de Γ et calculer son excentricité e.

c) Déterminer $\Gamma' = s(\Gamma)$ puis construire Γ et Γ'.

Exercice 5 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right)$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1° a) Montrer que f est dérivable sur $]2,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

b) Etudier la dérivabilité de f en 2 et dresser le tableau de variation de f.

2° a) Etudier la position relative de C_f par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

b) Etudier la branche infinie de C_f en $+\infty$.

c) Tracer la courbe C_f dans le repère $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

3° a) Montrer que f est une bijection de $[2,+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.

b) Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$ dans le repère $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

c) Expliciter l'expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

4° Pour $x \in]0,1]$ on pose : $F(x) = \int_2^{\frac{2}{x}} f(t)dt$.

a) Justifier l'existence de F sur l'intervalle $]0,1]$.

b) Montrer que F est dérivable sur $]0,1]$ et calculer $F'(x)$.

5° a) Montrer que pour tout $t \in [2,+\infty[$, $f(t) \geq \ln t$.

b) Calculer l'intégrale : $\int_2^{\frac{2}{x}} \ln t dt$.

c) En déduire que pour tout $x \in]0,1]$, $F(x) \geq \frac{2}{x}\left(\ln\left(\frac{2}{x}\right) - 1\right)$ et en déduire : $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$.

d) Dresser le tableau de variation de F sur $]0,1]$.

e) Tracer la courbe Γ dans un repère $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Publications AMIMATHS
avec l'appui du
Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif

Cahier de Maths 4AS
Contrôle continu 4AS
Contrôle continu 7D
Contrôle continu 7C
Rallyes de Maths 3ème
Rallyes de Maths 5ème
Rallyes de Maths 6ème
Olympiades de Maths 4ème
Olympiades de Maths 7ème
Jeux mathématiques et logiques

Publications AMIMATHS

avec l'appui du

Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif

Cahier de Maths 4AS

Contrôle continu 4AS

Contrôle continu 7D

Contrôle continu 7C

Rallyes de Maths 3ème

Rallyes de Maths 5ème

Rallyes de Maths 6ème

Olympiades de Maths 4ème

Olympiades de Maths 7ème

Jeux mathématiques et logiques