REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET
DE LA REFORME DU SYSTEME EDUCATIF
INSPECTION GENERALE

RECUEIL DE SUJETS CORRIGÉS DE

MATHEMATIQUES

Niveau Terminale

Série Sciences de la Nature

Année scolaire 2023-2024

Sommaire

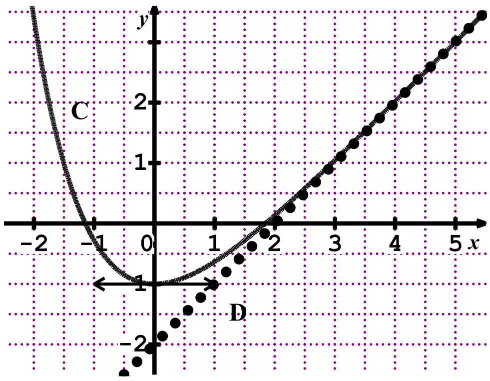
Préface

Sujet 1 Série SN

Exercice 1 (3 points)

La figure ci-contre représente la courbe (C) d'une fonction f, dans un repère orthonormé, et son asymptote D d'équation $y = x - 2$. (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule est correcte



N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	Sur $[0,+\infty[$, la fonction f est	croissante	décroissante	non monotone	0.5pt
2	$f(0) =$	1,8	-1	-2	0.5pt
3	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$	$-\infty$	0	$+\infty$	0.5pt
4	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$	0	1	$+\infty$	0.5pt
5	L'équation $f(x) - x + 3 = 0$ admet	0 solution	1 solution	2 solutions	0.5pt
6	Une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 est	$y = x - 1$	$y = 0$	$y = -1$	0.5pt

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée

Question n°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*

Exercice 2 (5 points)

Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 - (1+4i)z^2 - 3z - 1 - 8i$.

1° a) Calculer $P(-i)$. 0,5pt

b) Déterminer les complexes a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C}$: $P(z) = (z+i)(z^2 + az + b)$. 0,5pt

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. 0.5pt

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -i$; $z_B = -1 + 2i$ et $z_C = 2 + 3i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$. Déterminer la nature du triangle ABC.	0.75pt
b) Placer le point D d'affixe $z_D = 3$ et préciser la nature du quadrilatère $ABCD$.	0,5pt
3° Pour tout nombre complexe $z \neq 2+3i$, on pose $f(z) = \frac{z+i}{z-2-3i}$	
a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M d'affixe z tels que $\|f(z)\| = 1$	0,5 pt
b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que $\arg[f(z)] = \frac{\pi}{2}[\pi]$	0,5 pt
c) Justifier que les ensembles Γ_1 et Γ_2 passent par les points B et D.	0,25pt
4° Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = (z_B - i)^n$. Soit M_n le point d'affixe z_n et $d_n = \|z_n\|$	
a) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles M_n appartient à l'axe des abscisses.	0,25pt
b) Montrer que (d_n) est une suite géométrique et en déduire que $OM_n = (\sqrt{2})^n$	0,5pt
c) Exprimer en fonction de n la valeur de la somme $L_n = OM_1 + OM_2 + ... + OM_n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.	0,25pt

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x+1+\ln x}{x}$, et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.	
1.a) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat.	1 pt
b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et déduire que la courbe (C) admet une asymptote (D) à préciser.	1 pt
2.a) Montrer que $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$.	0,5 pt
b) Dresser le tableau de variation de f.	0,5pt
c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans $]0;+\infty[$, une unique solution x_0 et que $0,27 < x_0 < 0,28$.	0,5pt
3° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]0;1]$.	
a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.	0,25pt
b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}.	0,5pt

4.a) Construire (D), (C) et (C'), où (C') est la courbe représentative de g^{-1}.	**0,5pt**
b) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation E_m : $(m-1)x = 1 + \ln x$.	**0,25pt**
5.a) Montrer que $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$.	**0,5pt**
b) En déduire l'aire A du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.	**0, 5pt**

Exercice 4 : (6 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + (x+2)e^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, d'unité graphique 1cm.

1° a) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ puis calculer et interpréter graphiquement $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.	**1pt**
b) Justifier que $f(x) = 1 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$ puis calculer interpréter graphiquement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.	**1pt**
2° Calculer $f'(x)$, où f' est la fonction dérivée de f. Dresser le tableau de variation de f.	**0,75pt**
3° Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α. Justifier que $-2{,}2 < \alpha < -2$	**0,75pt**
4° a) Montrer que $I(0;3)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C). Ecrire une équation de la tangente T à (C) en ce point.	**0.5pt**
b) Construire la courbe (C) et sa tangente T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.	**0,5pt**
5° Soit S l'aire, en cm^2, de la partie du plan fermée par la courbe (C) et les axes de coordonnées.	
a) Montrer que $S = \int_\alpha^0 f(x)dx$.	**0,5pt**
b) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + h'(x)$, où $h(x) = -(x+3)e^{-x}$. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.	**0,5pt**
c) Justifier que $e^{-\alpha} = \frac{-1}{\alpha+2}$ et en déduire que $S = \frac{-(\alpha+3)^2}{\alpha+2}$.	**0,5pt**

Fin.

Corrigé du sujet 1

Exercice 1

Question n°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Réponse	*A*	*B*	*C*	*B*	*A*	*C*

Exercice 2

1. a) $P(-i)=(-i)^3-(1+4i)(-i)^2-3(-i)-1-8i=i+1+4i+3i-1-8i=0$

$\boxed{P(-i)=0}$

b) Pour la détermination de a et b on peut utiliser le tableau de Horner, la division euclidienne ou l'identification

Le tableau de Horner :

	1	$-1-4i$	-3	$-1-8i$
$-i$		$-i$	$-5+i$	$1+8i$
	1	$-1-5i$	$-8+i$	0

Donc $a=-1-5i;\ b=-8+i$

Donc $\boxed{P(z)=(z+i)(z^2-(1+5i)z-8+i)}$

La division euclidienne :

$$\begin{array}{l|l} P(z)=z^3-(1+4i)z^2-3z-1-8i & z+i \\ \hline -z^3-iz^2 & z^2-(1+5i)z-8+i \\ =\boxed{-(1+5i)z^2-3z-1-8i} & \\ (1+5i)z^2-(5-i)z & \\ =\boxed{(-8+i)z-1-8i} & \\ -(-8+i)z+1+8i & \\ \boxed{0} & \end{array}$$

L'identification :

$P(z)=(z+i)(z^2+az+b) \qquad =z^3+(a+i)z^2+(b+ai)z+bi$

Par identification $\begin{cases} a+i=-1-4i \\ b+ai=-3 \\ bi=-1-8i \end{cases}$

Alors $a=-1-5i;\ b=-8+i$

c) $P(z)=0 \Leftrightarrow (z+i)(z^2-(1+5i)z-8+i)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z+i=0 \Leftrightarrow z=-i \\ z^2-(1+5i)z-8+i=0 \end{cases}$

Pour l'équation $z^2-(1+5i)z-8+i=0$ **on a** $\Delta=(-(1+5i))^2-4(-8+i)=8+6i$.

Calculons les racines carrées du nombre complexe $\Delta = 8+6i$:

Or $z = x+iy$ est racine carrée de $\Delta \Leftrightarrow z^2 = 8+6i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = |8+6i| \\ x^2-y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 10 & (1) \\ x^2-y^2 = 8 & (2) \\ xy = 3 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x = \pm 3$ et $(1)-(2) \Rightarrow 2y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \pm 1$

Or d'après (3) : $xy = 3 > 0$ donc x et y sont de même signe.

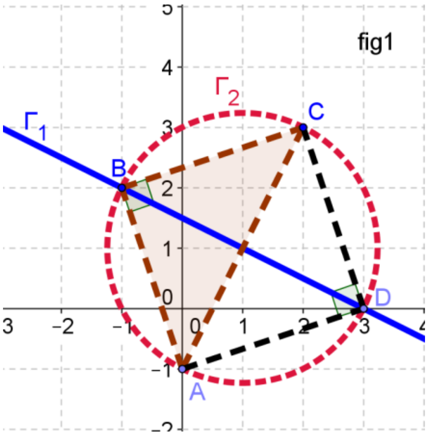
Donc les racines carrées de Δ sont $3+i$ et $-3-i$

D'où les solutions de l'équation $z^2-(1+5i)z-8+i = 0$ sont

$$z' = \frac{1+5i+3+i}{2\times 1} = 2+3i \text{ et } z'' = \frac{1+5i-(3+i)}{2\times 1} = -1+2i.$$

Donc l'ensemble de solutions est $\{-i, -1+2i; 2+3i\}$

2. a) La Figure :



La nature du triangle ABC

$$\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \frac{-1+2i-(-i)}{-1+2i-(2+3i)} = \frac{-1+3i}{-3-i} = \frac{-i(-3-i)}{-3-i} = -i$$

Donc $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\frac{AB}{CB} = |-i| = 1$

D'où le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

<u>Autre méthode</u>

$AB = |z_B - z_A| = \sqrt{10}$; $CB = |z_B - z_C| = \sqrt{10}$ et $AC = |z_C - z_A| = \sqrt{20}$

Alors $AB = CB$ et $AB^2 + CB^2 = AC^2$ Donc le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

b) ABCD est un parallélogramme si et seulement si : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Or $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1+3i$ et $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = -1+3i$

Donc $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ d'où ABCD est un parallélogramme.

(On peut aussi utiliser le fait que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu, en effet

$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} = 1 + i\,)$

Comme en plus le triangle ABC est isocèle et
Rectangle en B, alors ABCD est un carré.

3. a) $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow |f(z)| = 1$.

$$|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-(-i)}{z-(2+3i)}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-z_A}{z-z_C}\right| = 1 \Leftrightarrow MA = MC$$

Donc Γ_1 **est l'ensemble des points équidistants de A et C ; c'est la médiatrice du segment** $[AC]$ **or** $\text{med}[AC] = (BD)$**, d'où** Γ_1 **est la droite (BD).**

<u>Construction de</u> Γ_1 **(cf : figure 1).**

b) $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \arg[f(z)] = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left[\frac{z-z_A}{z-z_C}\right] = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

Alors Γ_2 **est le cercle de diamètre** $[AC]$ **privé de A et C.** Γ_2 **est donc le cercle circonscrit au carré ABCD.**
<u>Construction de</u> Γ_2 **(cf : figure 1).**

c) Puisque Γ_1 **et** Γ_2 **sont, respectivement, la droite (BD) et le cercle circonscrit au carré ABCD ; les points B et D appartiennent à ces deux ensembles.**
On peut également vérifier que $f(z_B) = -i$ **ce qui entraine que** $|f(z_B)| = 1$ **et** $\arg[f(z_B)] = \frac{\pi}{2}[\pi]$**. De même pour** z_D **.**

4. a) $M_n \in (Ox) \Leftrightarrow z_n \in \mathbb{R}$ **or** $z_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

donc : $M_n \in (Ox) \Leftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{Z},\ \arg(z_n) = k\pi\right)$

Or $\arg(z_n) = \arg(-1+i)^n = n \times \arg(-1+i) = n \times \frac{3\pi}{4}$

Donc $M_n \in (Ox) \Leftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{N},\ \frac{3n\pi}{4} = k\pi\right) \Leftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{N},\ n = \frac{4k}{3}\right)$

Et comme 3 et 4 sont premiers entre eux alors $\frac{4k}{3}$ **est un entier si et seulement si k est un multiple de 3,**

Alors M_n **appartient à (Ox) si et seulement si n est un multiple de 4.**

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = |z_{n+1}| = |z_B - i|^{n+1} = |-1+i||-1+i|^n = \sqrt{2}d_n$

Donc (d_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$.

D'où $OM_n = |z_n - 0| = d_n = d_0 \times q^n = |z_B - i|^0 \times (\sqrt{2})^n = (\sqrt{2})^n$

c) $L_n = d_1 + d_2 + ... + d_n = \sqrt{2} \times \dfrac{1-(\sqrt{2})^n}{1-\sqrt{2}} = (2+\sqrt{2})\left((\sqrt{2})^n - 1\right)$

Exercice 3

1° a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(x+1+\ln x) = (+\infty)\times(-\infty) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, la courbe (C) admet donc une asymptote verticale à droite de 0.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+1+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$ donc la courbe (C) admet une asymptote horizontale (D) d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$

2° a) Nous avons : $f'(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}\right)' = 0 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1-\ln x}{x^2} = \dfrac{-\ln x}{x^2}$

b) En se basant sur les réponses de questions précédentes, on peut dresser le tableau de variation suivant de f :

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

c) Sur l'intervalle, $[1;+\infty[$ $f(x) > 1$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[1;+\infty[$

Sur l'intervalle $]0;1[$ f étant continue, strictement croissante et change de signe alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 et encore sur $]0;+\infty[$.

En plus $f(0,27) \simeq -0,15 < 0$ et $f(0,28) \simeq 0,03 > 0$ donc $f(0.27)\times f(0.28) < 0 \Rightarrow 0.27 < x_0 < 0.28$ (Théorème des valeurs intermédiaires)

3° a) g est continue et strictement croissante sur l'intervalle I.

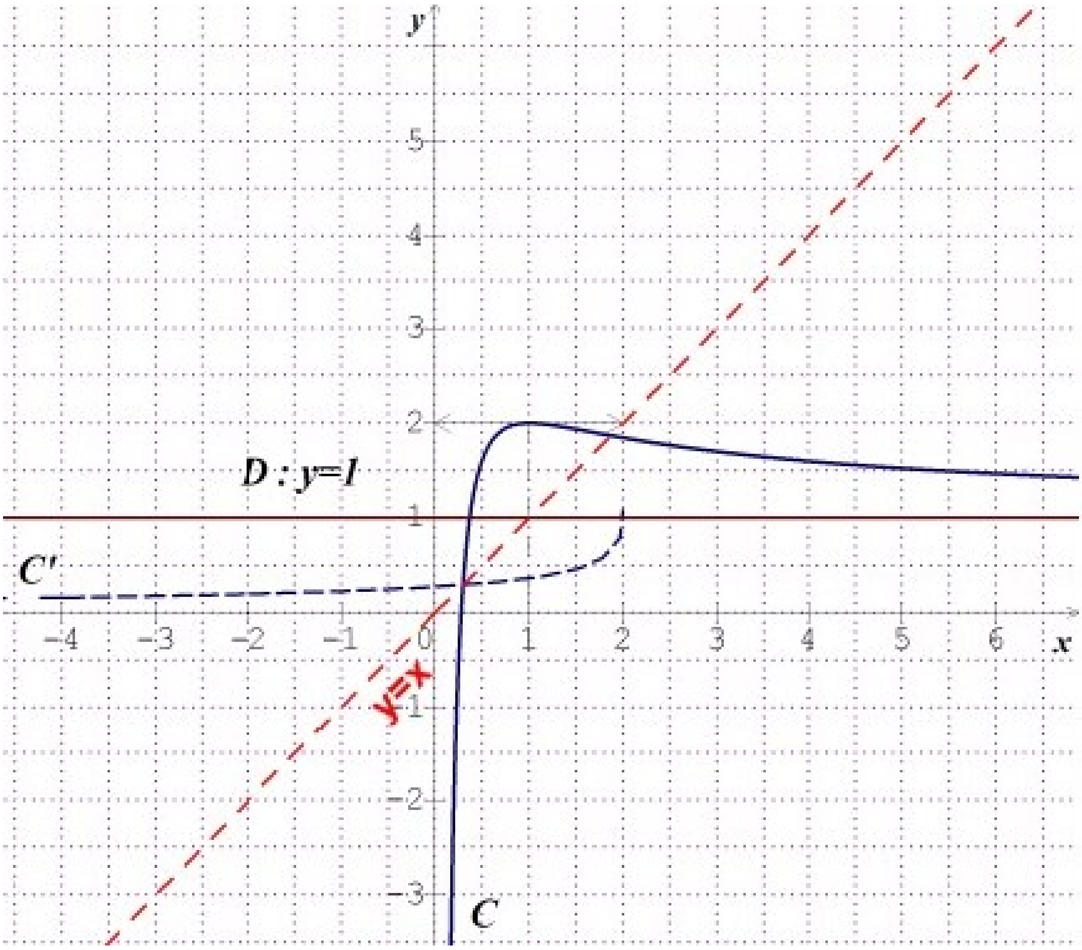
Donc elle réalise une bijection de I sur un intervalle $J = f(I) =]-\infty; 2]$.

b) La fonction g^{-1} se comporte comme g donc elle est strictement croissante sur J.

D'où le T.V ci-contre.

x	$-\infty \quad 2$
$(g^{-1})'$	$+$
g^{-1}	$0 \nearrow 1$

b) Construction de (D) ,(C) et (C')



b) $E_m : (m-1)x = 1 + \ln x \Leftrightarrow mx = x + 1 + \ln x \Leftrightarrow \dfrac{x+1+\ln x}{x} = m$

Graphiquement, cette équation représente l'intersection de (C) avec la droite d'équation $y = m$.

D'où le tableau suivant :

Valeurs de m	Nombre de solutions
$m \le 1$	1 solution
$1 < m < 2$	2 solutions
$m = 2$	1 solution
$m > 2$	0 solution

5° a) L'expression $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme $u'(x)\times u(x)$ avec $u(x)=\ln x$ donc

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\left[\frac{1}{2}u^2\right]_1^e=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e=\frac{1}{2}(1^2-0^2)=\frac{1}{2}$$

b) l'aire A du domaine plan délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$ est :

$$A=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\left[x+\ln x\right]_1^e+\frac{1}{2}=e+1-(1+0)+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{2e+1}{2}u.a}$$

Exercice 4 :

1° a) Calcul de limites de f :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+(x+2)e^{-x}\right)=-\infty \text{ car } \begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=+\infty\end{cases}$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\frac{(x+2)}{x}e^{-x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\frac{(x+2)}{x}\frac{1}{e^x}\right] \text{ et comme}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x}=1 \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=+\infty\end{cases} \text{ alors } \boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty}$$

Interprétation graphique : (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $(-\infty)$

b) $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=1+(x+2)e^{-x}=1+\frac{x+2}{e^x}=1+\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}$

Alors

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=1 \quad \text{Donc } \boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=1}$$

Interprétation graphique : La droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale de (C) à $+\infty$

2° $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=1+(x+2)e^{-x}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme et produit de fonctions dérivables et $f'(x)=e^{-x}-(x+2)e^{-x}=(-x-1)e^{-x} \Rightarrow \boxed{f'(x)=(-x-1)e^{-x}}$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$1+e$	↘	1

3° Nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$

Sur $I_1=\left]-\infty;-1\right]$: f est continue et strictement croissante, de plus $f(I_1)=\left]-\infty;1+e\right]$.

Alors la restriction de f sur I_1 réalise une bijection de I_1 sur $\left]-\infty;1+e\right]$ et comme $0\in\left]-\infty;1+e\right]$ alors, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet, sur I_1, une unique solution α

Sur $I_2=\left]-1;+\infty\right[$: f est strictement positive, donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur I_2

Conclusion : l'équation $f(x)=0$ admet, dans $\mathbb{R}$, une unique solution α ; de plus $f(-2,2)\approx-0.8$ et $f(-2)=1$ et $f(-2,2)\times f(-2)<0$ donc $-2,2<\alpha<-2$

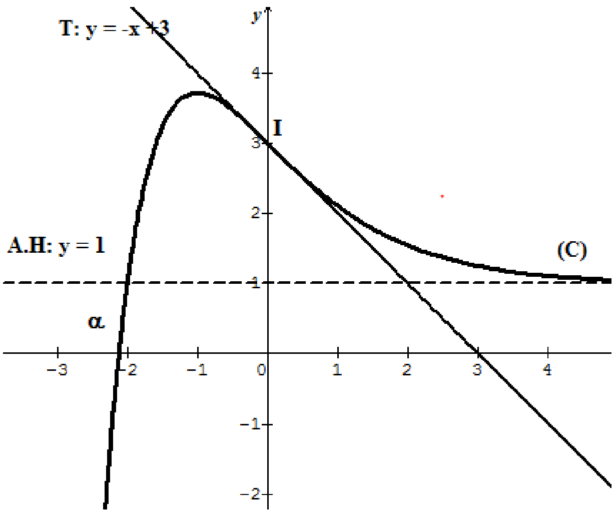
4° a) Puisque $f''(x)=xe^{-x}$ alors elle s'annule et change de signe en $x_0=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	

et comme $f(0)=1+(2+0)e^0=3$, alors le point $I(0;3)$ est un point d'inflexion pour (C)

Equation de la tangente à (C) en I : $y=f'(0)(x-0)+f(0)\Leftrightarrow\boxed{y=-x+3}$

b) Construction de la courbe (C) et sa tangente T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.



5° a) Puisque $\alpha < 0$ **et** $\forall x \in \left]\alpha;0\right[,\ f(x) > 0$

(la courbe (C) est située au-dessus de (Ox) dans l'intervalle $\left]\alpha;0\right[$**) et de plus (C) coupe (Ox) au point d'abscisse** α **alors l'aire de la partie du plan fermée par la courbe (C) et les axes de coordonnées est** $S = \int_{\alpha}^{0} f(x)dx$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = -(x+3)e^{-x}$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ **et** $h'(x) = (x+2)e^{-x}$

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + h'(x)$**. Comme f et** h' **sont continues sur** $\mathbb{R}$**, on peut déduire qu'une primitive F de f est** $\boxed{F(x) = x + h(x) = x - (x+3)e^{-x}}$

c) On a : $f(\alpha) = 0$

et $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 + (\alpha+2)e^{-\alpha} = 0 \Leftrightarrow \boxed{e^{-\alpha} = \dfrac{-1}{\alpha+2}}$

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{0} f(x)dx = \left[F(x)\right]_{\alpha}^{0} = F(0) - F(\alpha) \\
&= \left(0 - (0+3)e^{0}\right) - \left(\alpha - (\alpha+3)e^{-\alpha}\right) \\
&= -3 - \alpha + (\alpha+3) \times \frac{-1}{\alpha+2} \\
&= -\frac{(\alpha+3)((\alpha+2)+1)}{\alpha+2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{-(\alpha+3)^2}{\alpha+2}} \text{ ua}$$

Sujet 2 Série SN

Exercice 1 (3 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = e^{\frac{n}{2}+1}$ et soit $v_n = \ln\left[(u_n)^2\right]$.

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La valeur de u_2 est égale à	e	$e^{\frac{3}{2}}$	e^2	0,5pt
2	La suite (u_n) est	géométrique	arithmétique	Convergente	0,5pt
3	Le terme général de (v_n) est	$v_n = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2$	$v_n = n+2$	$v_n = \frac{n}{2}+1+\ln 2$	0,5pt
4	La suite (u_n) est	Croissante	Décroissante	Non monotone	0,5pt
5	La somme $v_0 + v_1 + \cdots + v_n =$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{(n+1)(n+4)}{2}$	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$	0,5pt
6	Le produit $u_{2021} \times u_{2022} \times u_{2023} =$	e^{2023}	$e^{\frac{6069}{2}}$	e^{3036}	0,5pt

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

Question n°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Réponse						

Exercice 2 (3 points)

Selon des statistiques publiées en 2013 par l'ONS 48% de la population mauritanienne se trouve dans le milieu urbain et 52% dans le milieu rural. D'autre part selon l'Enquête Démographique et de Santé en Mauritanie (EDSM) 2019-2021 publié en février 2022 par l'ANSADE (en collaboration avec le Ministère de la santé), le pourcentage de possession de moustiquaires imprégnées d'insecticides est 41 % dans le milieu rural contre 23 % dans le milieu urbain.

NB : l'ONS est l'office national des statistiques, il s'appelle actuellement ANSAD (Agence Nationale de la Statistique et de l'Analyse Démographique et Economique)

On choisit, au hasard, un mauritanien. On suppose que le taux d'urbanisation n'a pas évolué. On note A l'évènement « l'individu choisi est du milieu urbain » et B l'évènement « l'individu choisi possède une moustiquaire imprégnée d'insecticide ».

On désigne par $P_A(B)$ la probabilité de réaliser B sachant que A est réalisé.

1° Calculer $P(A)$ et vérifier que $P_A(B) = 0,23$. — 1.5pt

2° En déduire les valeurs de $P(A \cap B)$ et $P(B)$ puis calculer $P_B(A)$ — 1.5pt

Exercice 3 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2-x-1)e^{-x}+1$. On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.	
1° a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$. Interpréter graphiquement.	0,75pt
b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire que Γ admet en $+\infty$ une asymptote (Δ) à préciser.	0,75pt
c) Déterminer le signe de (x^2-x-1) sur $\mathbb{R}$. En déduire la position relative de (Δ) et Γ.	0,5pt
2° a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=x(3-x)e^{-x}$ puis dresser le tableau de variations de f.	0,75pt
b) Construire (Δ) et Γ dans le repère précédent.	0,5pt
3° a) Montrer que la fonction f vérifie l'équation différentielle E : $y''+2y'+y=2e^{-x}+1$	0,25pt
b) En déduire une primitive de f puis calculer l'aire A du domaine délimité par la courbe Γ, l'asymptote (Δ) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.	0,5pt

Exercice 4 : (5 points)

1° On considère le polynôme P défini pour tout nombre complexe z par : $P(z)=z^3-(4+i)z^2+7z-4-7i$.	
a) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $(2+4i)^2$.	0, 5pt
b) Calculer $P(i)$ et déterminer les nombres a et b tels que $\forall z\in\mathbb{C}$, $P(z)=(z-i)(z^2+az+b)$.	0,5pt
c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$.	0,5pt
2° Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.	
a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=1-2i$, $z_B=i$ et $z_C=3+2i$.	0,75pt
b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.	0,25pt
c) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre $\frac{z_C-i}{z_A-i}$. En déduire la nature de ABC.	0,5pt
3° a) Calculer l'affixe z_I du point I milieu de $[AB]$ et l'écrire sous forme exponentielle.	0,5pt
b) Déterminer le plus petit entier n, tel que $2023\times\left\|z_I^n\right\| \le 1$.	0,25pt

4° a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M, d'affixe z, tels que $\lvert z-1+2i\rvert = \lvert z-3-2i\rvert$.	0,5pt
b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M, d'affixe z, tels que $\arg\left(\dfrac{z-3-2i}{z-1+2i}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.	0,5pt
c) Vérifier que le point D appartient à chacun des deux ensembles Γ_1 et Γ_2.	0,25pt

Exercice 5 : (5 points)

I. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 4 + 3\ln x$.	
1°a) Justifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.	0,5pt
b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g.	0,5pt
2°a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $1{,}6 < \alpha < 1{,}7$.	0,25pt
b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.	0,25pt
II. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \dfrac{1-3\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.	
1°a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat.	0,5pt
b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x+2)$, En déduire que (C) admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$.	0,75pt
c) Etudier la position relative de (C) et (D).	0,25pt
2° a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ où g est la fonction définie dans la partie I.	0,5pt
b) Vérifier que $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha^2 - 2\alpha - 3}{\alpha}$ puis dresser le tableau de variation de f.	0,25pt
3° Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I =]0,\alpha]$.	
a) Montrer que h est une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.	0,5pt
b) Dresser le tableau de variation de la réciproque h^{-1} de h.	0,25pt
4° Construire (C) et (C') et (D) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, (C') étant la courbe de h^{-1}.	0,5pt

Fin.

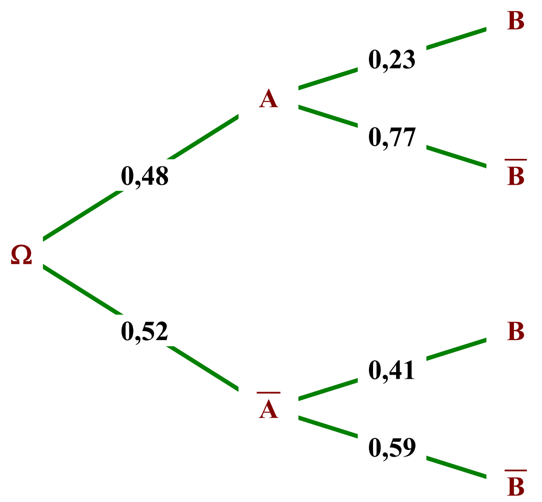
Corrigé du Sujet 2

Exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse	C	A	B	A	B	C

Exercice 2

On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



1° Selon l'étude, 48% de la population se trouve dans le milieu urbain donc $P(A)=\dfrac{48}{100}=0,48$

Et 23 % de la population du milieu urbain possède une M.I.I. donc $P_A(B)=\dfrac{23}{100}=0,23$

2° On a $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=0,48\times 0,23=0,1104$

De plus d'après la formule de probabilités totales, on a : $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap\overline{A})$

$P(B\cap\overline{A})=P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)=0,52\times 0,41=0,2132$

Donc $P(B)=0,1104+0,2132=0,3236$

En fin, on a : $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,1104}{0,3236}=0,3411$.

Exercice 3

1. a) Comme $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}=+\infty\end{cases}$ **alors**

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x^2-x-1)e^{-x}+1\right]=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-x-1)e^{-x}+1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(x-1-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{e^x}+\frac{1}{x},$$ or

$$\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}\left(x-1-\frac{1}{x}\right)=-\infty\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=+\infty,\text{et }\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0\end{cases}$$

Donc $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$. Interprétation graphique: la courbe Γ admet une BP de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2-x-1)e^{-x}+1=\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2-x-1}{e^x})+1$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x})+1=0-0-0+1=1$

Donc la courbe Γ admet une A.H (Δ) d'équation $y=1$, au voisinage de $+\infty$.

c) Les solutions de l'équation $x^2-x-1=0$ sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, d'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2-x-1		+	0	−	0	+	

Position relative de Γ et (Δ) : on a $f(x)-y=\left(x^2-x-1\right)e^{-x}$, or $\forall x\in\mathbb{R}, e^{-x}>0$ on en déduit le tableau de P.R suivant :

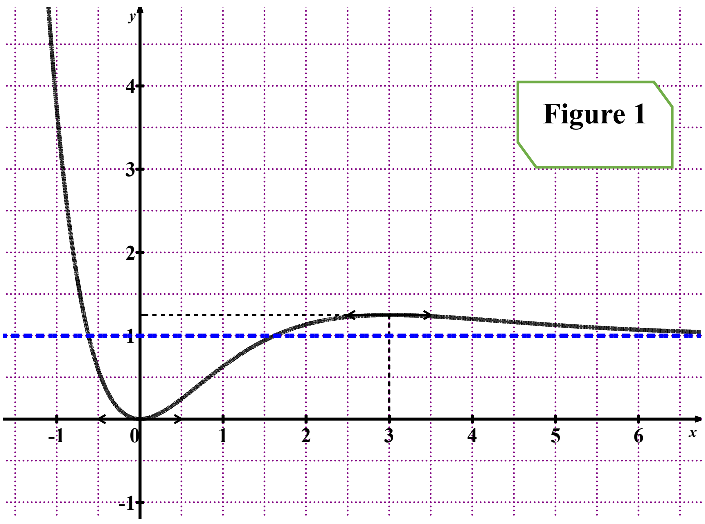
x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f(x)-y$		+	0	−	0	+	
P. R.		$\Gamma/(\Delta)$	$\cap$	$(\Delta)/\Gamma$	$\cap$	$\Gamma/(\Delta)$	

2. a) Calcul de la dérivée : la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=(2x-1)e^{-x}-e^{-x}(x^2-x-1)+0$$
$$=(-x^2+3x)e^{-x}=x(3-x)e^{-x}$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{5}{e^3}+1$	↘	1

b) La construction de (Δ) et Γ



3. a) $f'(x)=(3x-x^2)e^{-x}$ et $f''(x)=(x^2-5x+3)e^{-x}$ alors $f''(x)+2f'(x)+f(x)=(x^2-5x+3)e^{-x}+2(-x^2+3x)e^{-x}+(x^2-x-1)e^{-x}+1=2e^{-x}+1$ et par conséquent la fonction f vérifie l'équation différentielle E.

b) Soit F est une primitive de f. Puisque $f''(x)+2f'(x)+f(x)=2e^{-x}+1$ alors $f'(x)+2f(x)+F(x)=-2e^{-x}+x+k,\ k\in\mathbb{R}$ Par conséquent, si $k=0$, $F(x)=-f'(x)-2f(x)-2e^{-x}+x=-(x^2+x)e^{-x}+x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

Du fait que la courbe de f est située en dessous de la droite (Δ) dans l'intervalle $[0;1]$, l'aire A du domaine délimité par la courbe Γ, l'asymptote (Δ) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ est :

$$A=-\int_0^1 (f(x)-1)dx=\left[-F(x)+x\right]_0^1=\left[(x^2+x)e^{-x}\right]_0^1=2e^{-1} \text{ Donc } \boxed{A=\frac{2}{e}\text{u.a}}$$

Exercice 4

1. a) $(2+4i)^2=2^2+2\times2\times4i+(4i)^2=4+16i-16=-12+16i$

b) $P(z)=z^3-(4+i)z^2+7z-4-7i$
$\Rightarrow P(z)=i^3-(4+i)i^2+7i-4-7i=-i+4+i+7i-4-7i=0$

En utilisant un tableau de Horner

	1	$-4-i$	7	$-4-7i$
i		I	$-4i$	$4+7i$
	1	-4	$7-4i$	0

Alors $a=-4$ et $b=7-4i$

Donc $\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=(z-i)\left(z^2-4z+7-4i\right)$ $\boxed{0{,}5\text{ pt}}$

c) $P(z)=0 \Leftrightarrow z=i$ ou $z^2-4z+7-4i=0$.

Pour $z^2-4z+7-4i=0$ on a $\Delta=(-4)^2-4\times1\times(7-4i)=16-28+16i=-12+16i=(2+4i)^2$ et les solutions sont :

$$z' = \frac{4-(2+4i)}{2} = 1-2i \text{ et } z'' = \frac{4+2+4i}{2} = 3+2i$$

Donc l'ensemble de solutions de l'équation $P(z) = 0$ est $\quad S = \{i, 1-2i,\ 3+2i\}$

2. a) Représentation graphique des points A, B et C

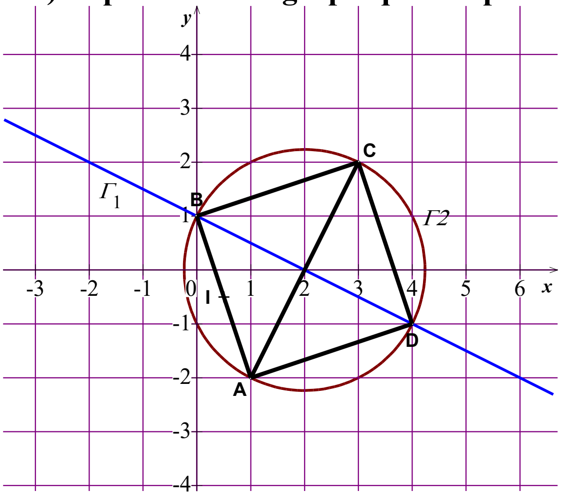


Figure 2

b) ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_D - z_A = z_C - z_B$

$\Leftrightarrow z_D = z_A + z_C - z_B = 4 - i$

Soit $\boxed{z_D = 4-i}$

c) Nous avons $\dfrac{z_C - i}{z_A - i} = \dfrac{3+2i-i}{1-2i-i} = \dfrac{3+i}{1-3i} = i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$

Puisque $\dfrac{z_C - i}{z_A - i} = \dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = i$ **, on en déduit que le triangle ABC est rectangle isocèle en B.**

3. a) Le point I est le milieu du segment $[AB]$

Donc $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{1-2i+i}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i}$.

Forme exponentielle de z_I :

On a $|z_I| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

alors $z_I = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow z_I = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

b) On a $z_I = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i \Rightarrow |z_I| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Donc $2023 \times |z_I^n| \le 1 \Leftrightarrow 2023 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}^n} \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}^n \ge 2023$

$\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{2}^n\right) \ge \ln 2023 \Leftrightarrow \dfrac{n}{2}\ln 2 \ge \ln 2023 \Leftrightarrow n \ge 2 \times \dfrac{\ln 2023}{\ln 2} \simeq 21{,}964$ **Donc le plus petit entier n, tel que** $2023 \times |z_I^n| \le 1$ **est égal à 22.**

4. a) Soit M un point quelconque du plan

$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow |z-1+2i| = |z-3-2i| \Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_C| \Leftrightarrow AM = CM$.

D'où M décrit la médiatrice de $[AC]$. Alors l'ensemble $\Gamma_1 = \text{med}[AC]$

<u>Construction de</u> Γ_1 (voir figure 2).

b) Soit M un point quelconque du plan

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-3-2i}{z-1+2i}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\frac{z-z_C}{z-z_A} = \frac{\pi}{2}[\pi]$ $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CM}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow$ M décrit le cercle de diamètre $[AC]$ privé de A et C.

<u>Construction de</u> Γ_2 (voir figure 2).

c) L'affixe du point D est $z_D = 4-i$

D'une part $|z_D - z_A| = |4-i-1+2i| = |3+i| = \sqrt{10}$

et $|z_D - z_C| = |4-i-3-2i| = |1-3i| = \sqrt{10}$

Donc $|z_D - z_A| = |z_D - z_C| = \sqrt{10}$, d'où $D \in \Gamma_1$

D'autre part

$$\arg\frac{z_D - z_C}{z_D - z_A} = \arg\frac{4-i-3-2i}{4-i-1+2i} = \arg\frac{1-3i}{3+i} = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}[\pi] = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Donc le point D appartient aussi à Γ_2 et par conséquent $\boxed{D \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2}$

Exercice 5

I. 1. a) Comme $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-4) = -4$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} 3\ln x = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2-4) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} 3\ln x = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

b) La fonction g est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $g'(x) = 2x + \frac{3}{x} > 0$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2. a) La fonction g est continue et strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et comme $0 \in \mathbb{R}$ (g change de signe sur $\mathbb{R}$) alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α. De plus $g(1,6) \approx -0,029$, $g(1,7) \approx 0,53$ et $f(\alpha) = 0$

$g(1,6) < 0 < g(1,7)$ et f est strictement croissante alors $1,6 < \alpha < 1,7$

b) Signe de $g(x)$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II. 1. a) $\lim\limits_{x\to0^+}(1-3\ln x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x=0^+$ alors $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(1-3\ln x)}{x}=+\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to0^+}(x-2)=-2$

Donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x-2+\dfrac{1-3\ln x}{x}\right)=+\infty$

Interprétation géométrique :

La courbe (C) admet une Asymptote verticale à droite de 0.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-3\ln x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-3\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x+2)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-2+\frac{1-3\ln x}{x}-x+2\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x+2)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-3\ln x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-3\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

(C) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y=x-2$ en $+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x+2)=0$

c) Pour étudier la position relative de (C) et (D), on étudie le signe de $f(x)-y$:

$f(x)-y=\dfrac{1-3\ln x}{x}$; $x>0$ et $1-3\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=e^{\frac{1}{3}}$

x	0		$e^{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
P. R.		(C)/(D)	$\cap$	(D)/(C)	

2. a) La fonction f est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=1+\frac{\frac{-3}{x}\times x-1\times(1-3\ln x)}{x^2}=1+\frac{-3-1+3\ln x}{x^2}$$

$$=\frac{x^2-4+3\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

b) $g(\alpha)=0\Leftrightarrow \ln\alpha=\dfrac{4-\alpha^2}{3}$, d'autre part $f(\alpha)=\alpha-2+\dfrac{1-3\ln\alpha}{\alpha}$, donc :

$$f(\alpha)=\alpha-2+\frac{1-3\times\frac{4-\alpha^2}{3}}{\alpha}=\alpha-2+\frac{1-4+\alpha^2}{\alpha}$$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$= \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1 - 4 + \alpha^2}{\alpha} = \frac{2\alpha^2 - 2\alpha + 3}{\alpha}$$

3. a) La fonction h est continue et strictement décroissante de $I = \left]0, \alpha\right]$ sur $J = h(I) = \left[f(\alpha); +\infty\right[$ alors h réalise une bijection de I sur J.

x	0		α
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$

b) La fonction h et sa réciproque h^{-1} ont le même sens de variation

X	$f(\alpha)$		$+\infty$
$(h^{-1})'(x)$		$-$	
$h^{-1}(x)$	α	$\searrow$	0

4° Construction de (C) et (C') et (D)

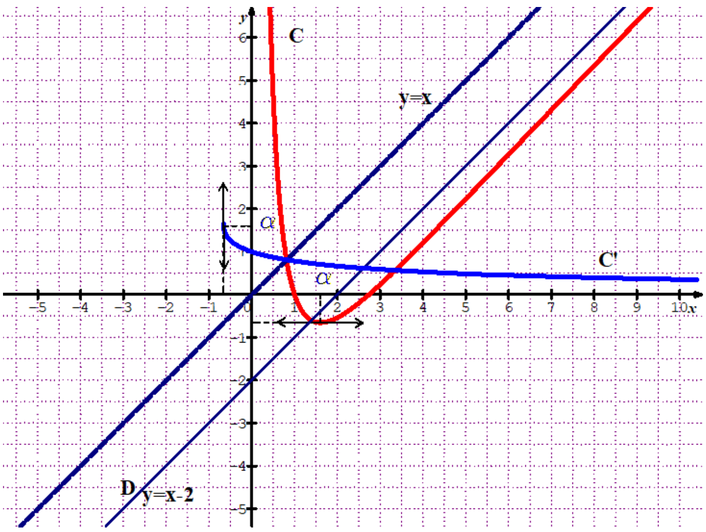


Figure 3

Sujet 3 Série SN

Exercice 1 (3 points)

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20% chaque jour. On introduit initialement 1000g de bactéries. Ensuite, chaque jour on remplace le milieu nutritif où se trouvent les bactéries. Durant cette opération 100g de bactéries sont perdus. Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de bactéries, en grammes au bout de n jours.

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	$u_2 = \dots$	1220	1300	1340	0,5pt
2	$u_{n+1} =$	$u_{n+1} = 0,2u_n - 100$	$u_{n+1} = 1,2u_n - 100$	$u_{n+1} = 1,2u_n + 900$	0,5pt
La suite (v_n) est de terme général $v_n = u_n - 500$					
3	(v_n) est une suite …	Géométrique	Arithmétique	Ni géométrique, ni arithmétique	0,5pt
4	$v_n = \dots$	$v_n = 500\times(1,2)^n$	$v_n = 1000\times(1,2)^n$	$v_n = 100\times(1,2)^n$	0,5pt
5	La limite de (u_n) est	1000	0	$+\infty$	0,5pt
6	Le 1er jour où la production dépasse 30kg est le …	23ième jours	36ième jours	43ième jours	0,5pt

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1.a) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - (4+4i)z - 3 + 12i = 0$ **0,75pt**

b) On considère le polynôme P défini pour tout nombre complexe z par : **0,5pt**

$P(z) = z^3 - (5+4i)z^2 + (1+16i)z + 3 - 12i$

Calculer $P(1)$ et déterminer les nombres complexes a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C}$,

$P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$

c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. **0,25pt**

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. **0,5pt**

a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1$, $z_B = 3i$ et $z_C = 4 + i$

b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme. **0,5pt**

3) Pour tout nombre complexe $z \neq 4+i$, on pose $f(z) = \dfrac{z-3i}{z-4-i}$. **0,5pt**

a) Calculer $f(1)$, puis en déduire la nature du triangle ABC.

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 de points M du plan d'affixe z telles que $|f(z)| = 1$ 0,5pt

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M tels que $\arg[f(z)] = \frac{\pi}{2}[\pi]$ 0,5pt

d) Déterminer et construire l'ensemble Γ_3 de points M du plan d'affixe z telles que $f(z)$ soit réel. 0,5pt

e) Montrer que le point A appartient aux ensembles Γ_1 et Γ_2. 0,5pt

Exercice 3 (5 points)

I) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = 1 - 2x + e^{2x}$

1) Dresser le tableau de variation de g. 0,5pt

2) En déduire le signe de g 0,5pt

II) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2 + xe^{-2x}$

On appelle C sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ 0,5pt

2.a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{2x}}$ 0,5pt

b) Dresser le tableau des variations de f. 0,5pt

3) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note C ' la courbe de la fonction réciproque de f. 0,5pt

4) a) Démontrer que la droite D d'équation y = x + 2 est une asymptote à la courbe C au voisinage de $+\infty$ 0,5pt

b) Étudier la position relative de C par rapport à D. 0,5pt

c) Montrer que la courbe C admet une branche parabolique, que l'on précisera, au voisinage de $-\infty$ 0,5pt

5) Tracer D , C et C ' dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ 0,5pt

Exercice 4 (7 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = -2x^2 - 1 + \ln x$.

1) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$. Étudier son signe sur $]0\,;\,+\infty[$. 0,5pt

2) Etudier les variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$. (On ne demande pas les limites de g aux bornes de son ensemble de définition). 0,5pt

3) En déduire que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) < 0$. 0,25pt

Partie B

Soit f la fonction définie sur]0 ; $+\infty$ [par $f(x)=-x+1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm.

1. a) Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat. 0,75pt

b) Calculer la limite de f en $+\infty$. 0,5pt

c) Démontrer que la droite Δ d'équation y =−x+1 est asymptote à la courbe C. 0,5pt

d) Étudier la position relative de C et Δ sur]0 ; $+\infty$ [. 0,5pt

2. a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$ et vérifier que pour tout x de]0 ; $+\infty$ [, 0,5pt

$f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$.

c) Déduire de la partie A. le tableau de variations de f sur]0 ; $+\infty$ [. 0,5pt

d) Calculer f(1). En déduire le signe de f sur]0 ; $+\infty$ [. 0,5pt

3) Dans le plan muni du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, tracer la droite Δ et la courbe C. 0,5pt

<u>Partie C</u> 0,5pt

1. Vérifier que la fonction F définie sur]0 ; $+\infty$ [par $F(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{4}(\ln x)^2$ est une primitive de f.

2) Calculer l'intégrale $I=\int_1^e f(x)dx$ (on donnera la valeur exacte). 0,5pt

3. a) Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x =1 et x = e. 0,25pt

b. Déduire de la question 2. de la partie C. la valeur exacte de l'aire S de E en cm². 0,25pt

Corrigé du Sujet 3

Exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse	A	B	A	A	C	B

Exercice 2

1.a) $z^2-(4+4i)z-3+12i=0$

$\Delta=(4+4i)^2-4(-3+12i)=32i+12-48i=12-16i=(4-2i)^2$

En effet $(4-2i)^2=4^2-16i+(2i)^2=12-16i$

Donc les solutions sont $z_1=\dfrac{4+4i-(4-2i)}{2}=3i$; $z_2=\dfrac{4+4i+4-2i}{2}=4+i$

D'où l'ensemble de solutions $S=\{3i;4+i\}$

$(4-2i)^2=4^2-16i+(2i)^2=12-16i$

b) $P(1)=1^3-(5+4i)(1)^2+(1+16i)\times1+3-12i$

$=1-5+1+3-4i+16i-12i=0$

Le nombre $z_0=1$ est une racine du polynôme P. donc il existe deux complexes a et b tels que $P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$

En utilisant le tableau de Horner on obtient :

	1	$-5-4i$	$1+16i$	$3-12i$
1		1	$-4-4i$	$-3+12i$
	1	$-4-4i$	$-3+12i$	$\boxed{0}$

$a=-4-4i$ et $b=-3+12i$

D'où $P(z)=(z-1)(z^2-(4+4i)z-3+12i)$

c) $P(z)=0\Leftrightarrow(z-1)(z^2-(4+4i)z-3+12i)=0$

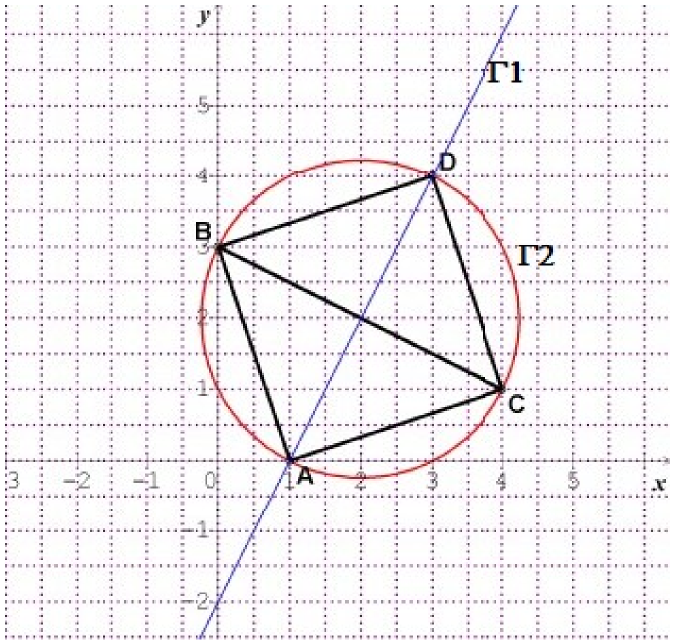
$\Leftrightarrow z=1$ ou bien $(z^2-(4+4i)z-3+12i)=0$

Pour la deuxième équation on a :

Donc $z_1=3i$; $z_2=4+i$

D'où l'ensemble de solutions de l'équation $P(z)=0$ est $S=\{1;3i;4+i\}$

2.a) Construction :



b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme

ABDC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow z_D - z_B = z_C - z_A$

$\Leftrightarrow z_D = z_B + z_C - z_A = 3i + 4 + i - 1$

Soit $\boxed{z_D = 3+4i}$

3° Pour tout nombre complexe $z \neq 4+i$**, on pose** $f(z)=\dfrac{z-3i}{z-4-i}$.

a) Calculer $f(1)$**, puis en déduire la nature du triangle ABC.**

$$f(z)=\frac{z-3i}{z-4-i} \Rightarrow f(1)=\frac{1-3i}{1-4-i}=\frac{1-3i}{-3-i}=i$$

$$f(1)=f(z_A)=\frac{1-3i}{1-4-i}=\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=i$$

Donc ABC est isocèle rectangle en A

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 **de points M du plan d'affixe z telles que** $|f(z)|=1$

$$M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow |f(z)|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-3i}{z-4-i}\right|=1 \Leftrightarrow |z-3i|=|z-4-i| \Leftrightarrow |z-z_B|=|z-z_C| \Leftrightarrow BM=CM$$

.

Donc Γ_1 **est la médiatrice de** $[BC]$.

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 **de points M du plan d'affixe z telles que** $f(z)$**, soit imaginaire pur.**

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow f(z)$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \begin{cases} f(z)=0 \\ \text{ou } \arg\left(f(z)\right)=\frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M=B \text{ ou} \\ \arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} M=B \text{ ou} \\ \left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$ **donc Γ_2 est le cercle de diamètre $[BC]$ privé de C**

d) Montrer que

On a : $f(z_A)=i$ donc $f(z)$ est imaginaire pur et $|f(z_A)|=1$ alors le point A appartient aux ensembles Γ_1 et Γ_2.

Exercice 3

I.1) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=-2+2e^{2x}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow -2+2e^{2x}=0 \Leftrightarrow e^{2x}=1 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $g(x) \geq 2$ alors $g(x) > 0$

II)1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+2+xe^{-2x}) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x+2+\frac{x}{e^{2x}}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x+2+\frac{1}{\left(\frac{e^{2x}}{x}\right)}\right) = +\infty$

2)a) $f'(x) = 1+e^{-2x}-2xe^{-2x} = \frac{1-2x+e^{2x}}{e^{2x}} = \frac{g(x)}{e^{2x}} > 0$

b) Tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) D'après l'étude et les variations de f : f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en plus $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

4. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x+2)) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^{2x}}{x}} = 0$

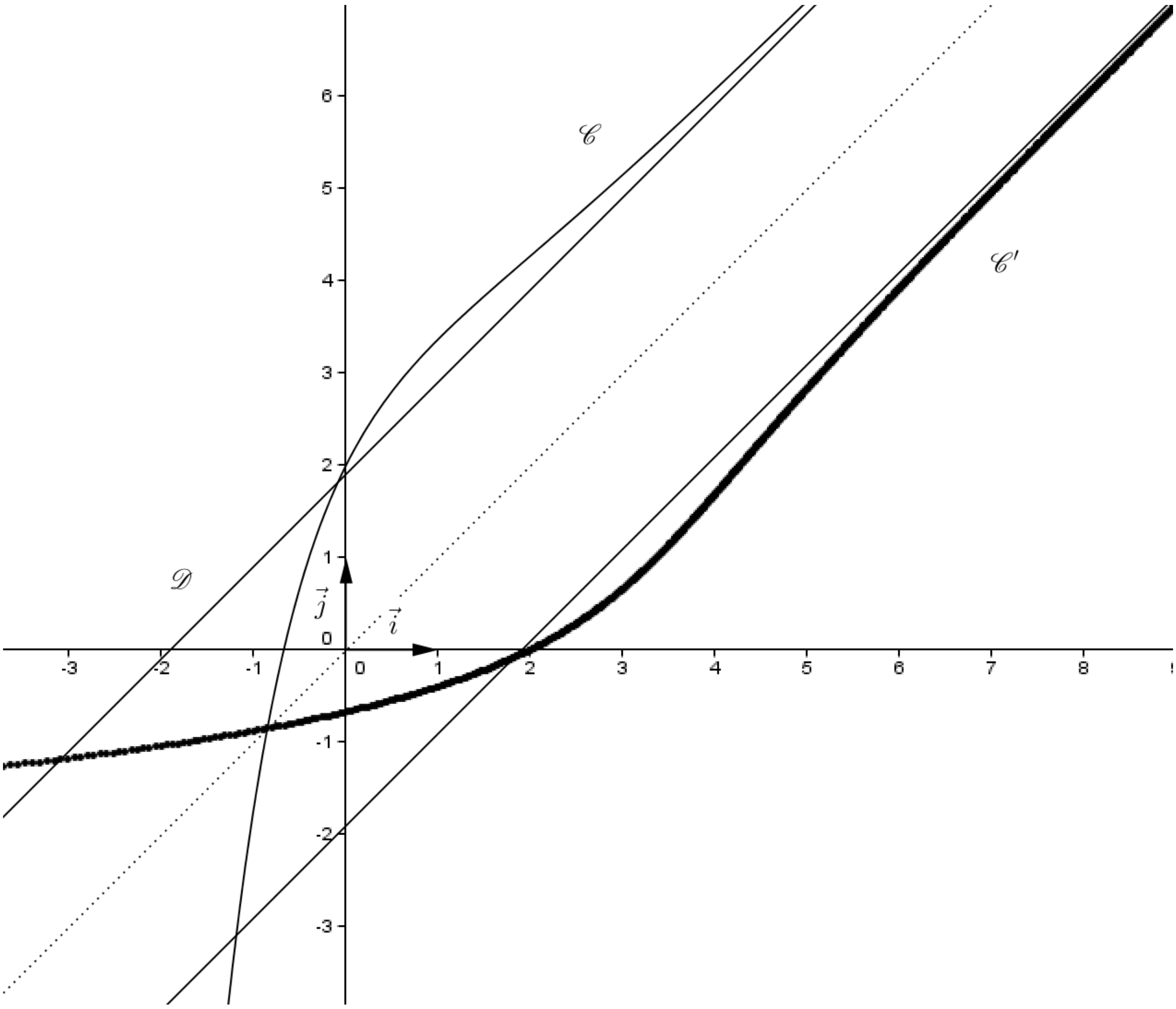
Donc la droite D : y = x + 2 est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$.

b) Position relative de C par rapport à D.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y=xe^{-2x}$	-	0	+
PR	D/C	$C\cap D$	C/D

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{e^{2x}}\right)=+\infty$. **Alors C admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$**

5) Représentations graphique



Exercice 4

Partie A

1) $g(x)=-2x^2-1+\ln x$**, la fonction g est dérivable sur]0 ; $+\infty$ [**

$$g'(x) = -4x + \frac{1}{x} = \frac{1-4x^2}{x} = \frac{(1-2x)(1+2x)}{x}.$$

x	0		1/2		$+\infty$
g'(x)	|	+	0	−	

2) Les variations de g :

x	0		1/2		$+\infty$
g'(x)	|	+		−	
g(x)	|	↗	$-\frac{3}{2}-\ln 2$	↘	

3) Le maximum de g est $-\frac{3}{2}-\ln 2$ donc $g(x) \le g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}-\ln 2 < 0$.

Partie B

1\. a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x+1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x+1-\frac{1}{2}\frac{1}{x}\ln x\right) = +\infty$; car $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$

Interprétation : la droite x = 0 est une asymptote verticale de C.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-x+1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$ en effet, $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} -x+1 = -\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-(x+1)\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}\right) = 0$ donc la droite Δ : y =−x+1 est une asymptote oblique à la courbe C.

d) $\left(f(x)-(x+1)\right) = \left(-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}\right)$ et lorsque $x > 1$, $-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x} < 0$ car $\ln x > 0$. Donc sur $[1;+\infty[$ C est au-dessus de Δ ; sur $]0;1]$ C est en dessous de Δ.

x	0		1		$+\infty$
f(x)−y	|	+	0	−	
PR	|	C/Δ	$C\cap\Delta$	Δ/C	

2\. a) $f'(x) = -1-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2} = \frac{-2x^2-1+\ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$. Donc f' est négative et f décroissante.

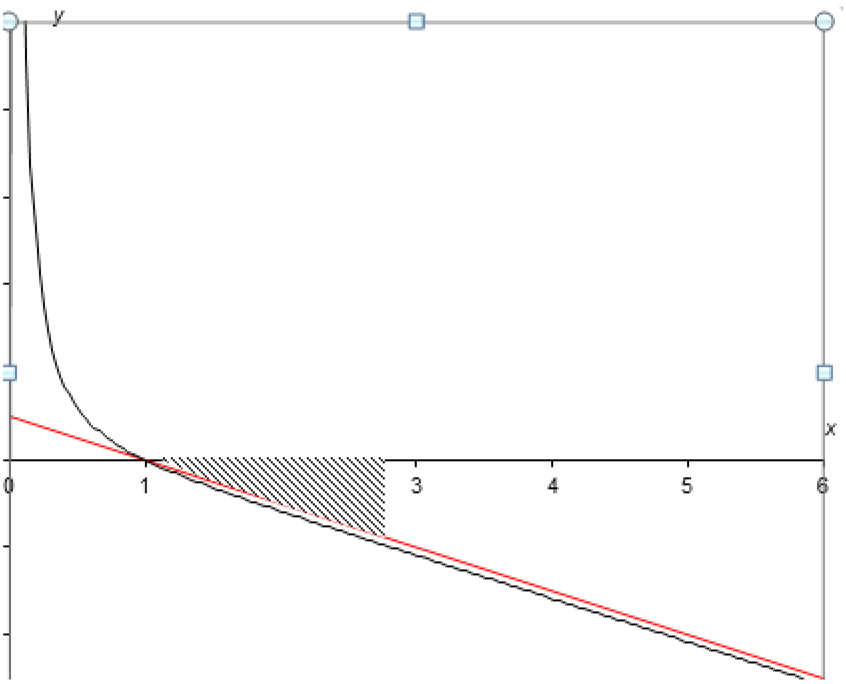
b) Le tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

d. Comme f(1) = 0 alors :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

3. Représentations graphique :



Partie C

1) Puisque $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}(\ln x)^2$ **alors f est dérivable et :**

$$F'(x) = -\frac{1}{2}(2x) + 1 - \frac{1}{4}\left(2\frac{1}{x}\ln x\right) = -x + 1 - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x} = f(x)$$

Donc F est une primitive de f.

2) Calcul de I :

$$I=\int_1^e f(x)\,dx=[F(x)]_1^e=F(e)-F(1)=\left[-\frac{1}{2}e^2+e-\frac{1}{4}(\ln e)^2\right]-\left[-\frac{1}{2}1^2+1-\frac{1}{4}(\ln 1)^2\right].$$
$$=-\frac{1}{2}e^2+e-\frac{3}{4}$$

3. b) L'unité d'aire est $2\text{ cm}\times 2\text{ cm}=4\text{ cm}^2$; alors l'aire de la partie E du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x =1 et x = e est égale à la valeur absolue de l'intégrale calculée dans la question précédente, multipliée par l'unité d'aire, soit : $(2e^2-4e+3)\text{cm}^2$,

Sujet 4 Série SN

Exercice 1 (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{e}\sqrt{u_n}$ et on définit les deux suites : $v_n = \ln\left[(u_n)\right]$ et $w_n = v_n + 2$.

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La valeur de u_2 est égale à	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\left(\frac{1}{e}\right)^{2}$	0,5pt
2	La valeur de v_1 est égale à	-1	0	1	0,5pt
3	v_{n+1} s'écrit sous la forme :	$\frac{1}{2}v_n + 1$	$\frac{1}{e}v_n - 1$	$\frac{1}{2}v_n - 1$	0,5pt
4	La suite (w_n) est	géométrique	arithmétique	Constante	0,5pt
5	Le terme général de la suite (w_n) est	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^{n-2}}$	0,5pt
6	L'expression de (u_n) en fonction de n est	$\frac{1}{e^2}\times e^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$	$e^2 \times e^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$	$\frac{1}{e}\times\left(\sqrt{e}\right)^{n-1}$	0,5pt

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

Question n°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Réponse						

Exercice 2 (3 points)

A l'un des carrefours de Nouakchott, un panneau de feu tricolore de circulation est doté d'un compteur : le signal est rouge pendant 45 secondes puis vert pendant 33 secondes et ensuite jaune pendant 2 secondes.

1° A 12 heure 0 mn 0 s, le feu rouge est déclenché. Une voiture arrive à ce panneau entre 12 h 0mn 0s et 12h1mn20s. Le temps d'arrivée de la voiture suit une loi uniforme sur $[0;80]$.

Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : la voiture trouve le feu vert	0,75pt
B : la voiture trouve le feu rouge	0,75pt
C : la voiture trouve le feu rouge sachant que son moment d'arrivée est dans l'intervalle $[20;70]$	0,5pt

2° La durée de vie, en heures, de l'une des ampoules utilisées dans le feu tricolore est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,00002$

a) Quelle est la probabilité que l'ampoule dure plus de 30000 heures ?	0,5pt
b) Quelle est la probabilité que l'ampoule dure plus de 30000 heures, sachant qu'elle a déjà duré 20000 heures.	0,5pt

Exercice 3 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1°a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $15+8i$ — 0,75pt

b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2-(2+3i)z-5+i=0$ — 0,75pt

2° Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 3+2i$, $z_B = -1+i$ et $z_C = 2-2i$ et pour tout nombre complexe $z \neq 2-2i$, on pose $f(z) = \dfrac{z+1-i}{z-2+2i}$

a) Placer les points A, B et C. — 0,5pt

b) Ecrire le nombre $f(z_A)$ sous forme algébrique et déduire que le triangle ABC est isocèle — 0,5pt

c) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation $f(z)=i$ puis interpréter graphiquement. — 0.5pt

d) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur. — 0,5pt

3° Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = (z_B)^{4n}$,et soit M_n le point d'affixe z_n

a) Ecrire z_B sous forme trigonométrique. — 0,25pt

b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels M_n appartient à l'axe des abscisses. — 0,25pt

Exercice 4 (5 points)

I. 1° Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) : $y''+y=2y'$. — 0,5pt

2° Déterminer la solution g de l'équation (E) qui vérifie $g(0)=-1$ et $g(1)=0$. — 0,5pt

II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)e^x+1$. On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement. — 0,75pt

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à Γ et étudier leur position relative. — 0,75pt

2° a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = xe^{x}$ puis en déduire le signe de f' sur $\mathbb{R}$.	0,75pt
b) Dresser le tableau de variation de f.	0,5pt
3° a) Montrer que la courbe Γ admet un point d'inflexion A et préciser ses coordonnées.	0,5pt
b) Déterminer une équation de la tangente T au point A	0,25pt
c) Construire (Δ), T et Γ dans le repère précédent.	0,5pt

Exercice 5 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = (\ln x)(-1+\ln x)$, on peut également écrire $f(x) = -\ln x + (\ln x)^2$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°a)Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ puis interpréter graphiquement.	0,75pt
b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.	0,75pt
2° a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{-1+2\ln x}{x}$	0,5pt
b) Calculer $f'(\sqrt{e})$ puis dresser le tableau de variation de f.	0,5pt
3°a) Déterminer une équation de la tangente T à (C) au point A d'abscisse 1.	0,5pt
b) Déterminer les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses	0,25pt
c) Construire la courbe (C) et sa tangente T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.	0,5pt
d) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $(\ln x)^2 - \ln x + x = m$	0,25pt
4° a) Utiliser des intégrations par parties pour montrer que $I = \int_1^e \ln x\,dx = 1$ et aussi pour calculer $J = \int_1^e (\ln x)^2 dx$	0,75pt
b) En déduire l'aire A de la partie du plan délimitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.	0,25pt

Fin.

Corrigé du sujet 4

Exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse	B	A	C	A	B	A

Exercice 2

1° Le feu vert dure 33 secondes

donc $P(A)=\frac{33}{80}=0,4125$

Le signal est rouge pendant 45 secondes

donc $P(B)=\frac{45}{80}=0,5625$

Le feu jaune dure 2 secondes

donc $P(C)=P(B)/_{[20,70]}=\frac{P(B\cap[20,70])}{P([20,70])}=\frac{25}{50}=0,5$

2. a) La probabilité que l'ampoule dure plus de 30000 heures est $P(T>30000)=e^{-0,00002\times30000}=e^{-0,6}=0,548$

b) la probabilité que l'ampoule dure plus de 30000 heures, sachant qu'elle a déjà duré 20000 heures est $\begin{aligned}&P_{T>20000}(T>30000)=P_{T>20000}(T>20000+10000)\\&=P(T>10000)=e^{-0,00002\times10000}=e^{-0,2}=0,818\end{aligned}$

Exercice 3

1. a) Soit $\delta=x+iy$ une racine carrée de $15+8i$ alors

$$\begin{cases}x^2+y^2=17\\x^2-y^2=15 \quad \text{donc } 2x^2=32 \text{ et } x=\pm4\\2xy=8\end{cases}$$

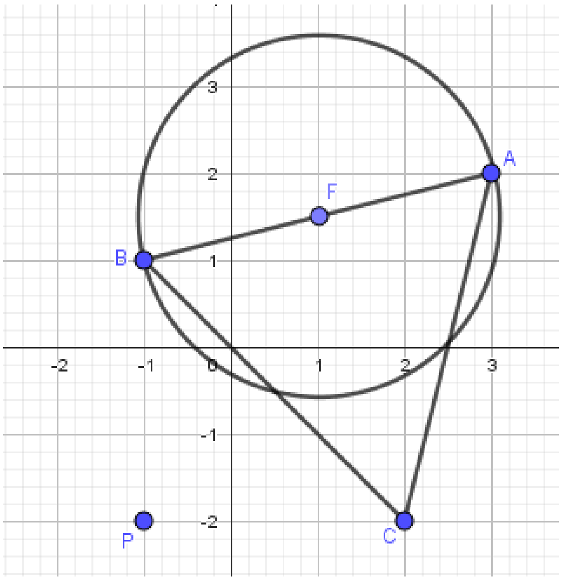
Pour $x=4$, $y=1$

Donc les racines carrées de $15+8i$ sont $4+i$ et $-4-i$

b) $\Delta=(-(2+3i))^2-4\times(-5+i)=15+8i$

Donc les solutions sont $z_1=\frac{2+3i+4+i}{2}=3+2i$ et $z_1=\frac{2+3i-4-i}{2}=-1+i$

2. a) Représentation graphique des points A, B et C



b) $f(z_A)=\dfrac{3+2i+1-i}{3+2i-2+2i}=\dfrac{4+i}{1+4i}=\dfrac{8}{15}+\dfrac{17}{15}i$

Comme $|f(z_A)|=1$ alors $\dfrac{|z_A-z_B|}{|z_A-z_C|}=1$ et par conséquent $AB=AC$ donc le triangle ABC est isocèle en A

c) $f(z)=i \Leftrightarrow \dfrac{z+1-i}{z-2+2i}=i \Leftrightarrow z+1-i=iz-2i-2$ Donc $z=\dfrac{-3-i}{1-i}=-1-2i$.

interprétation : si on note P le point d'affixe $-1-2i$ alors le triangle BCP est rectangle isocèle en P

d) Nous avons $f(z)\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} f(z)=0 \\ \text{ou } \arg(f(z))=\dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z-z_B=0 \\ \text{ou } \arg\dfrac{z-z_B}{z-z_C}=\dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z=z_B \\ \text{ou } \left(\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}\right)=\dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$ Donc L'ensemble Γ est le cercle de diamètre $[CB]$ privé de C.

3. a) $z_B=-1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

b) On a Comme $z_B\neq 0$ alors pour tout n, $z_n\neq 0$, et $M_n\neq O$ d'où

$M_n\in(Ox)\Leftrightarrow z_n\in\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z_n=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \arg\left(z_B\right)^{4n}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 4n\times\dfrac{3\pi}{4}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 3n=k,\ k\in\mathbb{Z}$ donc l'ensemble des entiers n pour lesquels M_n appartient à l'axe des abscisses est l'ensemble des entiers naturels,

Exercice 4

I. 1. L'équation caractéristique $r^2-2r+1=0$ admet une solution double $r_0=1$. Donc la solution générale de cette équation est de la forme $y(x)=(Ax+B)e^x$ où A et B sont des constantes réelles.

2. Soit g une solution de (E) qui vérifie $g(0)=-1$ et $g(1)=0$

Alors $B=-1$ et $A+B=0 \Rightarrow A=1$

D'où $\boxed{g(x)=(x-1)e^x}$

II. 1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-1)e^x+1\right]=+\infty\times+\infty=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^x+1}{x}=\lim_{x\to+\infty}(e^x(1-\frac{1}{x})+\frac{1}{x}=+\infty$$

Donc la courbe Γ de f admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$

b) Nous avons :

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=\lim_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^x\right]=\lim_{x\to-\infty}(xe^x-e^x)=0$$

donc a droite (Δ) d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à Γ au voisinage de $-\infty$

.

Position relative : On a $(f(x)-y)=(x-1)e^x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$, d'où le tableau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$		$+$
P.R	Δ/Γ		Γ/Δ

2. a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\left((x-1)e^x+1\right)'=(x-1)e^x+e^x+0=xe^x$$

b) Dresser le tableau de variation de f

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow xe^x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$ **d'où le tableau de variation de f**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. a) Nous avons :

$$f''(x) = (xe^x)' = xe^x + e^x = (x+1)e^x$$

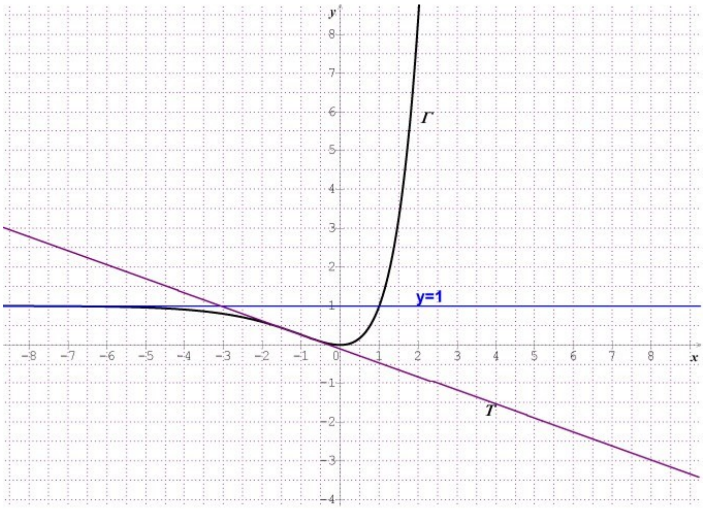
Alors $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$ **avec** $f(-1) = -\frac{2}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$, **donc le point** $A(-1; \frac{e-2}{e})$

Est un point d'inflexion pour la courbe Γ **de f.**

b) Nous avons $f'(-1) = -\frac{1}{e}$, **d'où une équation cartésienne de T**

$$y = \frac{-1}{e}(x+1) + \frac{e-2}{e} = \frac{-1}{e}x + \frac{e-3}{e}$$

c) Construction ire (Δ), **T et** Γ **dans le repère précédent.**



Exercice 5

1. a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to 0^+} (-1 + \ln x) = -\infty$ **Donc par produit de limites :** $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x)(-1 + \ln x) = +\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Interprétation graphique : la droite d'équation $x = 0$ **(l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à la courbe de f**

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} (-1 + \ln x) = +\infty$ **Donc par produit de limites** $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)(-1 + \ln x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x} \right) = 0$ **Interprétation graphique : la courbe de f admet une branche parabolique de direction (Oy) en** $+\infty$

2. a) La fonction f est la somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ donc elle est dérivable

et $\forall x \in]0;+\infty[\quad f'(x)=\left(-\ln x+(\ln x)^2\right)'=-\frac{1}{x}+2\times\frac{1}{x}\ln x=\frac{-1+2\ln x}{x}$

b) Calculer $f'\left(\sqrt{e}\right)$ puis dresser le tableau de variation de f.

$$f'\left(\sqrt{e}\right)=\frac{1-2\ln\left(\sqrt{e}\right)}{\sqrt{e}}=\frac{1-2\times\frac{1}{2}\ln e}{\sqrt{e}}=\frac{1-1}{\sqrt{e}}=0$$

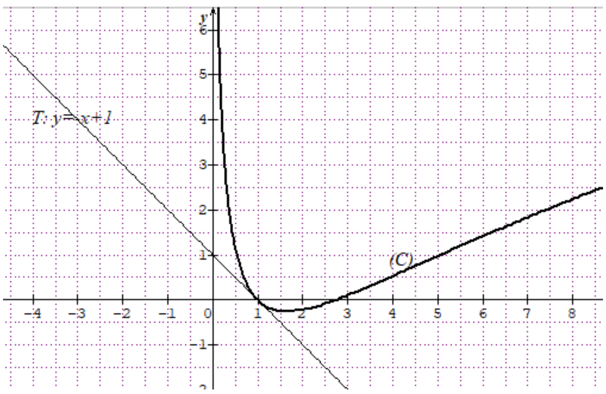
x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

3. a) $y=-1(x-1)+0 \Leftrightarrow y=-x+1$.

b) $f(x)=0 \Leftrightarrow (\ln x)(-1+\ln x)=0 \Leftrightarrow (\ln x=0 \text{ ou } \ln x=1) \Leftrightarrow (x=1 \text{ ou } x=e)$ *

alors (C) coupe (Ox) aux points $A(1;0)$ et $B(e;0)$

c) Construction de la courbe (C) et sa tangente T



d) $(\ln x)^2-\ln x+x=m \Leftrightarrow f(x)=-x+m$

Pour toute valeur de m, le nombre de solutions de cette équation est le nombre d'intersection de (C) avec la droite $D_m : y=-x+m$ (parallèle à T), alors :

Pour $m>1$, l'équation a deux solutions

Pour $m=1$, l'équation a une seule solution

Pour $m<1$, l'équation n'a pas de solution

4. a) Calcul de I :

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x \end{cases}$

$$I = \int_1^e \ln x dx = \left[x \ln x\right]_1^e - \int_1^e 1dx = \left[x \ln x - x\right]_1^e = 1$$

Calcul de J :

On pose $\begin{cases} w(x) = \left(\ln x\right)^2 \Rightarrow w'(x) = \dfrac{2\ln x}{x} \\ v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x \end{cases}$

$$J = \int_1^e \left(\ln x\right)^2 dx = \left[x \ln^2 x\right]_1^e - 2I = e - 2$$

b) En déduire l'aire A de la partie du plan délimitée par (C), l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Dans l'intervalle $\left[1;e\right]$ la courbe (C) est située en-dessous de l'axe (Ox), donc

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e f(x)dx \\ &= -\int_1^e \left(-\ln x + \left(\ln x\right)^2\right)dx \\ &= I - J \\ &= 1 - e + 2 \\ &= 3 - e \end{aligned}$$

Fin.

Sujet 5 Série SN

Exercice 1(3pt)

Un groupe de 200 candidats ont passé un test d'inscription dans un centre de formation professionnelle.

Le test est composé de deux épreuves, une épreuve écrite et une autre orale.

Les résultats ont montré que 120 candidats ont réussi l'épreuve écrite dont 90 ont réussi aussi

l'épreuve orale. Parmi ceux qui ont échoué dans l'épreuve écrite 25% ont réussi l'épreuve orale.

On choisit au hasard un candidat de ce groupe et on considère les événements suivants :

A : « le candidat a réussi l'épreuve écrite » ; B : « le candidat a réussi l'épreuve orale »

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est juste.

Indiquer la bonne réponse sans justification.

		A	B	C	
1	La probabilité P(A) vaut	0,12	0,60	0,24	0,5pt
2	La probabilité $P(A\cap B)$ vaut	0,45	0,24	0,25	0,5pt
3	La probabilité $P_A(B)$	0,60	0,75	0,45	0,25pt
4	La probabilité P(B) vaut	0,85	0,70	0,55	0,25pt
5	La probabilité $P_{\bar{A}}(B)$ vaut	0,20	0,25	0,80	0,25pt
6	La probabilité $P(A \cup B)$ vaut	0,70	0,25	0,45	0,25pt
7	La probabilité $P_B(A)$ vaut	8/11	9 /11	10/11	0,25pt

La durée de l'épreuve écrite varie de 30 à 80 minutes. On suppose que le temps X, exprimé en minutes, mis par un candidat avant de remettre sa copie, lors de cette épreuve, est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme.

8	La fonction densité de X est :	$f(x)=\frac{1}{50}$	$f(x)=\frac{1}{30}$	$f(x)=\frac{1}{80}$	0,25pt
9	La probabilité que le candidat remet sa copie après 40 minutes est :	0,80	0,20	0,50	0,25pt
10	La durée moyenne de l'épreuve écrite est :	50 minutes	25 minutes	55 minutes	0,25pt

Exercice 2(3pt)

Soit $P(z) = z^3 + (-6 - 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 - 45i$

1.a) Montrer que $P(3i) = 0$. 0,25pt

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que : 0,25pt

$P(z) = (z - 3i)(z^2 + az + b)$

c) Résoudre l'équation $P(z) = 0$. 0,5pt

On pose z_0 la solution imaginaire pure, z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et z_2 la troisième solution.

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, On considère les points A ; B et C d'affixes respectives : z_0 ; z_1 et z_2. 0,5pt

Placer les points A ; B et C dans le repère.

3) On pose $f(z) = \dfrac{z-3i}{z-3+2i}$ pour tout nombre complexe z d'image M tel que

$z \neq 3 - 2i$.

a) Calculer $f(z_B)$, en déduire la nature du triangle ABC. 0,5pt

b) Déterminer et construire l'ensemble des points Γ_1 tel que $|f(z)| = 1$. 0,5pt

c) Déterminer et construire l'ensemble des points Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur. 0,5pt

Exercice 3 (7pt)

Partie A :

1. Etudier les variations de la fonction $g(x) = 4e^x - 2xe^x - 4$	0.75pt
2. Montrer que $g(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est 0 et l'autre α vérifiant : $1,59 < \alpha < 1,60$	0.75 pt
3. En déduire le signe de g.	0.5 pt

Partie B :

On pose : $f(x) = \dfrac{2x-2}{e^x - 2x}$

1. Etudier les variations de $h(x) = e^x - 2x$ et préciser son signe, en déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. 0.5pt

2. Montrer que $f(x) = \dfrac{2 - \frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x} - 2}$. En déduire les limites de f en $\pm\infty$. 0.5pt

3. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe. 0.5pt

4. Donner le tableau de variation de f.	0.5pt
5. Montrer que $f(\alpha)=\frac{2-\alpha}{\alpha-1}$ en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.	0.5pt
6. Montrer que C_f admet deux asymptotes (étudier les positions relatives de C_f par rapport à ses asymptotes.	0.5pt
7. Tracer C_f.	0.5pt

Partie C

1. Montrer que $f(x)=\frac{e^x-2}{e^x-2x}-1$ En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.	0.5pt
2. Calculer l'aire définie par les points M(x ;y) tels que : $\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$	0.5pt

Exercice 4(7pt)

Soit f la fonction définie sur] 0 ; +∞ [par $f(x) = (x-1)(1-\ln x)$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ;\vec{i} ; \vec{j})$.

1) On considère la fonction g définie sur l'intervalle] 0 ; +∞ [par : $g(x)=\frac{1}{x}-\ln x$.

a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$, $\lim_{x\to +\infty} g(x)$.	0.5pt
b) Calculer la dérivée g'(x) puis dresser le tableau de variation de g.	0.5pt
c) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet sur] 0 ; +∞ [une unique solution telle que : $1,7 < \alpha < 1,8$.	0.5pt
d) En déduire le signe de g(x) sur] 0 ; +∞ [.	0.5pt
2.a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.	0.5pt
b) Montrer que pour tout x > 0, $f'(x) = g(x)$, où f' est la dérivée de f.	0.5pt
c) Dresser le tableau de variation de f	0.5pt
3.a) Montrer que $f(\alpha)=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ où α est le réel trouvé dans la question 1.c)	0.5pt
b) Déterminer les points d'intersection de la courbe Γ avec l'axe (Ox).	0.5pt
4) Soit h la restriction de f sur l'intervalle I = [α ; +∞[.	
a) Montrer que h réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J =] - ∞; $f(\alpha)$].	0.5pt
b) Calculer $\left(h^{-1}\right)'(0)$.	0.5pt

c) Construire Γ et Γ’ dans le repère où Γ’ est la courbe de h^{-1}. **0.5pt**

5.a) A l’aide d’une intégration par parties, montrer que $\int_1^e (x-1)\ln x\,dx = \frac{e^2-3}{4}$. **0.5pt**

b) En déduire l’aire du domaine plan délimitée par la courbe Γ, l’axe des abscisses et les droites d’équations respectives : x = 1 et x = e. **0.5pt**

Fin

Corrigé du Sujet 5

Exercice 1

Réponses aux QCM									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	B	C	B	A	B	A	A	C

Exercice 2

1) $P(z) = z^3 + (-6 - 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 - 45i$

a) On montre que $P(3i) = 0$.

$P(3i) = (3i)^3 - (6 + 4i)(3i)^2 + (12 + 21i)(3i) + 9 - 45i \Rightarrow P(3i) = -27i - (6 + 4i)(-9) + 36i - 63 + 9 - 45i$;

$P(3i) = -27i + 54 + 36i + 36i - 63 + 9 - 45i \Rightarrow$

$P(3i) = 36i + 36i - 27i - 45i + 54 + 9 - 63 = 72i - 72i + 63 - 63 = 0$.

b) Détermination des nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z - 3i)(z^2 + az + c) = 0$.

On a : P(z) est factorisable sous la forme : $P(z) = (z - 3i)(z^2 + az + b)$,

A l'aide du tableau d'Horner, on détermine les coefficients cherchés, a et b ;

	1	-6 - 4i	12 + 21i	9 - 45i
3i		3i	3 - 18i	- 9 + 45i
		-6 - i	15 + 3i	0
	1	a	b	0

Donc $P(z) = (z - 3i)(z^2 - (6 + i)z + 15 + 3i)$

c) Résolution de l'équation $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 3i = 0$ ou $z^2 - (6 + i)z + 15 + 3i = 0 \Leftrightarrow z_0 = 3i$ ou $z^2 - (6 + i)z + 15 + 3i = 0$. Soit (E) l'équation : $z^2 - (6 + i)z + 15 + 3i = 0$. On a : $a = 1$; $b = -6 - i$ et $c = 15 + 3i$. On a aussi $\Delta = b^2 - 4ac$;

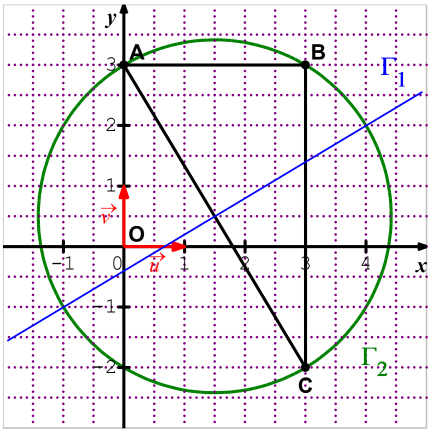
$\Delta = (-(6 + i))^2 - 4(1)(15 + 3i) = (-(6 + i))^2 - 4(1)(15 + 3i) \Rightarrow \Delta = 36 + 12i - 1 - 60 - 12i = -25 = (5i)^2$,

Soit $d = 5i$, c'où les solutions de (E) sont : $z_1 = \frac{-b+d}{2}$; $z_2 = \frac{-b-d}{2}$ / d est racine carrée de Δ ;

Donc, les solutions de (E) sont $z_1 = \frac{6+i+(5i)}{2} = 3+3i$; $z_2 = \frac{6+i-(5i)}{2} = 3 - 2i$.

<u>En conclusion</u> : les solutions de $P(z) = 0$ sont : $S = \{3i ; 3 + 3i ; 3 - 2i\}$.

2) Emplacement des points donnés et les constructions demandées



3.a) Calcul de $f(Z_B)$;

$$f(z_B)=\frac{z_B-3i}{z_B-3+2i}=\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}=\frac{3+3i-3i}{3+3i-3+2i}=\frac{3}{5i}=\frac{3i}{-5}=-\frac{3}{5}i=\frac{3}{5}(-i)$$ **, on en déduit que**

$$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}\ (\pi)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)=-\frac{\pi}{2}\ (\pi)$$ **d'où le triangle ABC est rectangle en B, il n'est pas isocèle car AB ≠ BC.**

b) Détermination de l'ensemble Γ_1 des points M tels $|f(z)|=1$;

On a : $f(z_M)=\frac{z_M-3i}{z_M-3+2i}=\frac{z_M-z_A}{z_M-z_C}\Rightarrow|f(z_M)|=1\Rightarrow\left|\frac{z_M-z_A}{z_M-z_C}\right|=\frac{|z_M-z_A|}{|z_M-z_C|}=1\Rightarrow$

$\frac{AM}{CM}=1\Rightarrow AM=CM\Rightarrow\Gamma_1$ **est la médiatrice de [AC].**

c) Détermination de l'ensemble Γ_2 des points M tels $f(z)$ est imaginaire pur

$$f(z_M)=\frac{z_M-z_A}{z_M-z_C}\text{ est imaginaire pur}\Leftrightarrow\begin{cases}f(z_M)=0\\ \text{ou}\\ \arg f(z_M)=\frac{\pi}{2}(\pi)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z_M=z_A=0\\ \text{ou}\\ \arg\frac{z_M-z_A}{z_M-z_C}=\frac{\pi}{2}(\pi)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}z_M=3i\\ \text{ou}\\ \left(\overrightarrow{CM}\,;\overrightarrow{AM}\right)=\frac{\pi}{2}(\pi)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}M=A\\ \text{ou}\\ M\in\mathscr{C}_{[AC]}\setminus\{A;C\}\end{cases}\begin{cases}z_M=3i\\ \text{ou}\\ \left(\overrightarrow{CM}\,;\overrightarrow{AM}\right)=\frac{\pi}{2}(\pi)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}M=A\\ \text{ou}\\ M\in\mathscr{C}_{[AC]}\setminus\{A;\ C\}\end{cases}$$

<u>En conclusion</u> : Γ_2 est le cercle de diamètre [AC] privé du point C.

Exercice 3

Partie A

1) Etude de g: $D_g = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

- Limites aux bornes de D_g :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\underset{0}{4e^x} - \underset{0}{2xe^x} - 4\right] = -4 \;;\; \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left[4 - 2x - \frac{4}{e^x}\right] = +\infty(-\infty) = -\infty$$

- Dérivée et signe de g :

$g'(x) = [4e^x - 2xe^x - 4]' = 4e^x - 2e^x - 2xe^x = (2 - 2x)e^x$; $g'(x)$ est du signe de $2 - 2x$ car $e^x >$ 0. Posons : $g'(x) = 0 \Rightarrow 2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1$.

- Tableau de variation de g

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	-4	$\nearrow$	$2e - 4$	$\searrow$	$-\infty$

2) On a : $g(0) = 4e^0 - 2\times0\times e^0 - 4 = 4 - 0 - 4 = 0 \Rightarrow 0$ est solution de l'équation : $g(x) = 0$.

- Sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ g est continue et strictement décroissante vers $J =]-\infty ; 1,43[$ et $0 \in J$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α de $]1 ; +\infty[$.

- On a : $g(1,59) = 0,02 > 0$ et $g(1,6) = -0,03 < 0 \Rightarrow 1,59 < \alpha < 1,60$.

3) D'après le T.V de g on en déduit le signe de g :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	0	-	

Partie B

$$f(x) = \frac{2x - 2}{e^x - 2x}$$

1) $h(x) = e^x - 2x$;

Etude de variation de $h(x)$

Domaine de définition :	Dérivée de h
• $Dh =]-\infty ; +\infty[$ Limites aux bornes : • $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - 2x = +\infty$ • $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(1 - \frac{2}{e^x}\right) = +\infty$	• $h'(x) = e^x - 2$; On pose : $h'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 2 = 0 \Rightarrow x = \ln 2$. Sens de variation • On a : $g'(x) > 0$, si $x > \ln 2$ et $g'(x) < 0$, si $x < \ln 2$.

- $h(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) \approx 2(1 - 0,65) \approx 0,7$

Tableau de variation de *h*

x	$-\infty$		ln2		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0,7	↗	$+\infty$

D'après le T.V de *h* celle-ci ne s'annule jamais ($h(x) \neq 0$) d'où *f* est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Ecriture de *f*(x)

On a : $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^x-2x}=\dfrac{x\left(2-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\dfrac{e^x}{x}-2\right)}=\dfrac{2-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{e^x}{x}-2}$

- **Calcul de limites :**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{2-0}{0-2}=-1 \Rightarrow$ **y = - 1 est une asymptote horizontale à (C_f) ;**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{2-0}{+\infty-2}=\dfrac{2}{+\infty}=0 \Rightarrow$ **y = 0 est une asymptote horizontale à (C_f)**

3) Dérivée de *f*

$$f'(x)=\frac{2\left(e^x-2x\right)-\left(e^x-2\right)(2x-2)}{\left(e^x-2x\right)^2}=\frac{2e^x-4x-2xe^x+2e^x+4x-4}{\left(e^x-2x\right)^2}\Rightarrow$$

$f'(x)=\dfrac{4e^x-2xe^x-4}{\left(e^x-2x\right)^2}=\dfrac{g(x)}{\left(e^x-2x\right)^2}$ **; Comme $\left(e^x-2x\right)^2>0 \Rightarrow f'$ et *g* ont même signe.**

4) Tableau de variation de *f*

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	-1	↘	-2	↗	$f(\alpha)$	↘	0

5) $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha-2}{e^\alpha-2\alpha}$ **or, $g(\alpha)=0 \Rightarrow 4e^\alpha-2\alpha e^\alpha-4=0 \Rightarrow e^\alpha(4-2\alpha)=4 \Rightarrow$**

$$e^\alpha=\frac{4}{4-2\alpha}=\frac{2}{2-\alpha}\Rightarrow f(\alpha)=\frac{2\alpha-2}{\dfrac{2}{2-\alpha}-2\alpha}=\frac{\alpha-1}{\dfrac{1}{2-\alpha}-\alpha}=\frac{\alpha-1}{\dfrac{1-2\alpha+\alpha^2}{2-\alpha}}\Rightarrow$$

$$f(\alpha)=\frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{(\alpha-1)^2}=\frac{2-\alpha}{\alpha-1}\ \Rightarrow$$

$f(\alpha) = \frac{-(\alpha-1)+1}{\alpha-1} = \frac{-(\alpha-1)}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1} \Rightarrow f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$, or $1{,}59 < \alpha < 1{,}6 \Rightarrow$

$\frac{1}{0{,}6} < \frac{1}{\alpha-1} < \frac{1}{0{,}59} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{0{,}6} - 1 < -1 + \frac{1}{\alpha-1} < -1 + \frac{1}{0{,}59} \Rightarrow 0{,}66 < f(\alpha) < 0{,}69$

6) Existence des asymptotes à (C_f)

De la question 2), $y = -1$ et $y = 0$ sont deux asymptotes horizontales à (C_f)

- **Position relative de (C_f) et ses asymptotes**

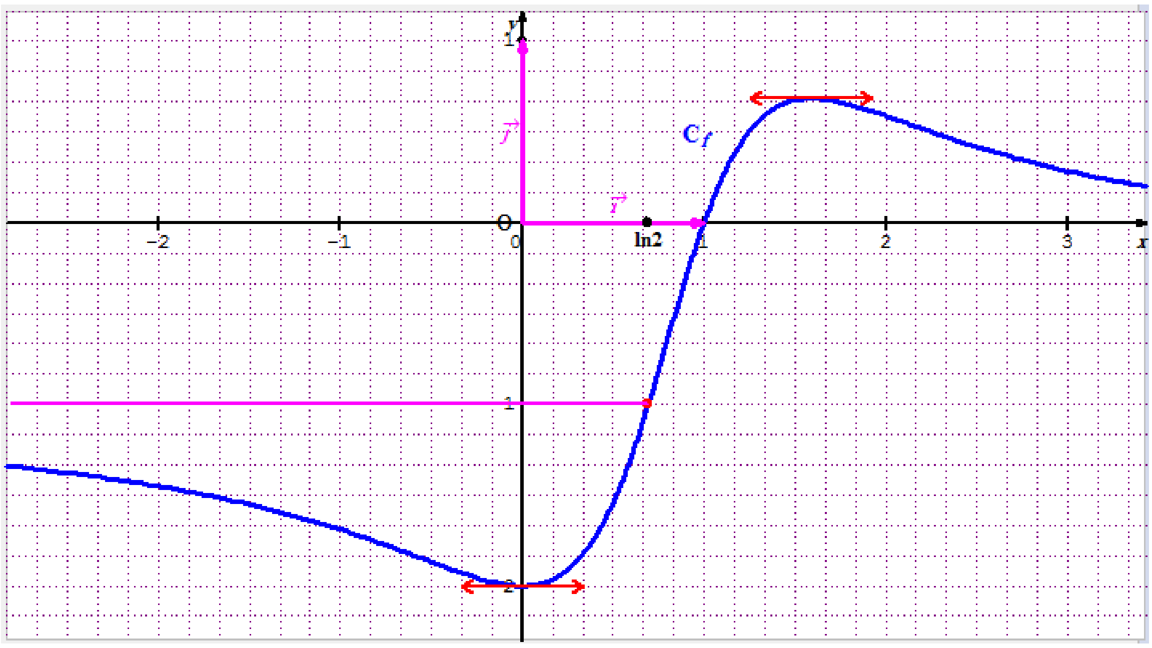
✓ **Pour $y = -1$, on a :** $f(x) - (-1) = f(x) + 1 = \frac{2x-2}{e^x - 2x} + 1 = \frac{2x - 2 + e^x - 2x}{e^x - 2x} = \frac{e^x - 2}{e^x - 2x} \Rightarrow$

x	$-\infty$	ln2	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	-	0	+
Pr	Δ/C	●	C/Δ

✓ **Pour $y = 0$, on a : $f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ d'où le tableau suivant :**

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y_{\Delta'}$	-	0	+
Pr	Δ'/C	●	C/Δ'

7) Tracé de *f*



Partie C

1) Ecriture de f(x)

On a : $\dfrac{e^x-2}{e^x-2x}-1=\dfrac{e^x-2-e^x+2x}{e^x-2x}=\dfrac{2x-2}{e^x+2x}=f(x)\Rightarrow F(x)=\ln(e^x-2x)-x$

2) Calcul de l'aire A est définie par $\begin{cases}1\le x\le 2\\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$

$$A=\int_1^2 f(x)dx=[F(x)]_1^2=\left[\ln\left(e^x-2x\right)-x\right]_1^2=\ln\left(e^2-4\right)-2-\left[\ln\left(e-2\right)-1\right]\Rightarrow$$

$A=\ln\left(e^2-4\right)-2-\ln\left(e-2\right)+1=-1+\ln\left(\dfrac{e^2-4}{e-2}\right)=-1+\ln\left(\dfrac{(e-2)(e+2)}{e-2}\right)\Rightarrow A=[(-1+\ln(e+2)]$ua.

Exercice 4

1.a) Calcul de limites :

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\frac{1}{x}(1-x\ln x)=+\infty(1-0)=+\infty\;;\;\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)=0+(-\infty)=-\infty$$

b) Calcul de la dérivée

- $g'(x)=\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\cdot\right)'=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1+x}{x^2}\Rightarrow g'(x)<0$; pour tout x de $D_f=\,]\,0\,;+\infty\,[$

- **Tableau de variation de g**
-

x	0	+∞
g'(x)	-	
g(x)	-∞ ↘	+∞

c) Comme *g* est continue et strictement monotone sur] 0 ; +∞ [, alors elle définit une bijection de cet intervalle sur] -∞ ; +∞ [,d'où l'équation, *g*(x) = 0, admet une seule solution, désignée α.

D'autre part, on a : *g*(1,7) = (1/ 1,7) – ln(1,7) ≈ 0,59 -0,53 ; *g*(1,7)≈0,06 ⇒ *g*(1,7)>0 →1

***g*(1,8) = (1/ 1,8) – ln(1,8) ≈ 0,56 -0,59 ; *g*(1,8)≈-0,03 ⇒ *g*(1,7)<0 →2. De 1 et 2 on en déduit que : 1,7 <α<1,8.**

2.a) Calcul de limites $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ **et interprétation :**

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x-1)(1-\ln x) = -\infty$ **⇒ x= 0 est une asymptote verticale**
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)(1-\ln x) = +\infty(-\infty) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-1)}{x}(1-\ln x) = -\infty$

⇒la courbe de *f* admet une branche parabolique de direction (Oy').

b) On montre que : pour tout x > 0, *f* '(x) = *g*(x), où *f* ' est la dérivée de *f*.

$$f'(x) = \left((x-1)(1-\ln x)\right)' = 1(1-\ln x) + (x-1)\left(-\frac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \ln x = g(x)$$

c) Tableau de variation de *f*

x	0		α		+∞
f '(x)	‖	+	0	-	
f(x)	‖ 0	↗	*f*(α)	↘	-∞

3.a) On montre que : $f(\alpha) = \dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. **D'après la question1.c) g(α) = 0**

$$g(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \ln\alpha = 0 \Rightarrow \ln\alpha = \frac{1}{\alpha};$$

en remplaçant lnα par sa valeur dans l'expression de *f*, on trouve :

$$f(\alpha) = (\alpha-1)\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = (\alpha-1)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}.$$

b) Intersection de la courbe Γ avec l'axe (Ox)
En posant *f*(x) = 0 , cela donne : (x- 1)(1-lnx)⇒ x = 1 ou lnx = 1 ⇒ x= e ;
Les points d'intersections sont, donc (1 ; 0) et (e ; 0).

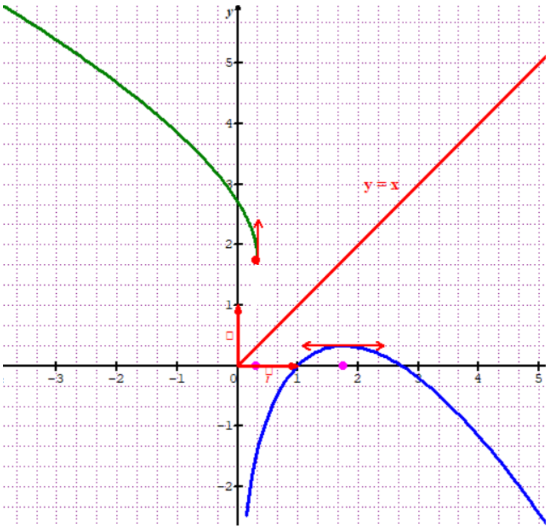
4.a) Montrons que h réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J =] - ∞; $f(\alpha)$].
D'après le T.V f, comme : $h = f/I$, celle-ci est continue et strictement décroissante de I sur J =] - ∞; $f(\alpha)$], alors elle définit une bijection de I sur J.

b) Calcul de $\left(h^{-1}\right)'(0)$

On a : $\left(h^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{h'(h^{-1}(0))}$, d'après 3.b)$h^{-1}(0) = 1$ et d'après 2.b)$h'(1) = g(1) = 1 \Rightarrow$

$\left(h^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{1} = 1.$

c) Construction de Γ et Γ' dans le repère donné



5.a) Calcul de l'intégrale $\int_1^e (x-1)\ln x dx = \dfrac{e^2-3}{4} = A$

On utilise l'intégration par parties, en posant :

$$\begin{cases} u(x) = \ln x & \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = x-1 & \Rightarrow v(x) = \dfrac{x^2}{2} - x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_1^e (x-1)\ln x dx = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x) \Rightarrow$$

$$\int_1^e (x-1)\ln x dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{x}\frac{x^2}{2} - 1\right)dx \Rightarrow$$

$$\int_1^e (x-1)\ln x dx = \frac{e^2}{2} - e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1\right)dx \Rightarrow$$

$$\frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{4}\left[x^2 - 4x\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{4}\left(e^2 - 4e - 1 + 4\right) \Rightarrow$$

$$\int_1^e (x-1)\ln x dx = \frac{2e^2}{4} - \frac{4e}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{4e}{4} - \frac{3}{4} = \frac{e^2-3}{4} = A \cdot$$

b)Soit (B) l'aire du domaine plan, délimité par la courbeΓ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : x = 1 et x = e.
On désigne par A l'intégrale calculée auparavant. On a Best donnée par la formule :

$$B = \int_1^e (x-1)(1-\ln x)dx = -\int_1^e (x-1)\ln x dx + \int_1^e (x-1)dx = -A + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^e \Rightarrow$$

$$B = \int_1^e (x-1)(1-\ln x)dx = -\frac{e^2-3}{4} + \frac{2e^2}{4} - \frac{4e}{4} - \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{e^2-4e+5}{4} \text{ u..a.}$$

Sujet 6 Série SN

Exercice 1 : (3 points)

Le tableau ci-contre, représente la répartition de 1000 élèves bacheliers selon le genre et la spécialité. On choisit un élève au hasard et on considère les événements suivants : G « l'élève choisi est un garçon » et S « l'élève choisi est scientifique »

	Scientifiques	Littéraires	Total
Garçons	340	240	580
Filles	260	160	420
Total	600	400	1000

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La probabilité $P(G)$ est	$0,24$	$0,34$	$0,58$	0,5pt
2	La probabilité $P(\overline{S})$ est	$0,3$	$0,4$	$0,6$	0,5pt
3	La probabilité $P_G(S)$ est	$\frac{17}{29}$	$\frac{21}{29}$	$\frac{23}{29}$	0,5pt
4	La probabilité $P(G \cup S)$ est	$0,82$	$0,84$	$0,85$	0,5pt

Les statistiques précédentes sont tirées d'un fichier enregistré sur un ordinateur. Soit T la variable aléatoire égale à la durée d'attente pour télécharger ce fichier, exprimée en seconde. On suppose que T suit une loi exponentielle de paramètre $0,1$.

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
5	La probabilité $P(T \le 30)$ est	e^{-3}	$1-10e^{-0,3}$	$1-e^{-3}$	0,5pt
6	La probabilité $P_{T>10}(T \ge 30)$ est	e^{-2}	$1-10e^{-0,2}$	$1-e^{-2}$	0,5pt

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée

Question n°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Réponse						

Exercice 2 : (4 points)

On considère le polynôme P défini pour tout nombre complexe z par : $P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 - (2-8i)z + 8 + 4i$.

1° a) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $(4-2i)^2$ **0,25pt**

b) Calculer $P(2i)$ et déterminer les complexes a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$	0,5pt
c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$.	0,5pt
2° Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.	
a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=-1+i$, $z_B=2i$ et $z_C=3-i$	0,75pt
b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.	0,25pt
c) Ecrire sous forme exponentielle les affixes des nombres z_A et z_B.	0,5pt
d) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre $\frac{z_C-2i}{z_A-2i}$, et en déduire la nature de ABC	0,5pt
3° a) Déterminer et construire l'ensemble E des points M, d'affixe z, tel que $\lvert z-3+i\rvert=\lvert z+1-i\rvert$	0,5pt
b) Déterminer l'ensemble F des points M, d'affixe z, tel que $\arg(z-3+i)-\arg(z+1-i)=\frac{\pi}{2}[\pi]$	0,25pt

Exercice 3 : (3 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1}=u_n+e^{-n}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.	0.75pt
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $v_n=u_{n+1}-u_n$ et soit $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}$	
a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.	0.75pt
b) Exprimer v_n en fonction de n.	0.5pt
c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n=u_n$.	0.5pt
d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et calculer sa limite.	0.5pt

Exercice 4 : (4 points)

I. 1° Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) $y''+2y'+y=0$.	0,25pt
2° Déterminer la solution h de l'équation (E) qui vérifie $h(0)=-1$ et $h(-1)=0$.	0,25pt

II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -(x+1)e^{-x} - 1$. On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.	
1° a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement.	0,75pt
b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale à Γ et étudier leur position relative.	0, 5pt
2° a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = xe^{-x}$ puis en déduire son signe sur $\mathbb{R}$.	0,5pt
b) Dresser le tableau de variation de f.	0,5pt
3° a) Montrer que la courbe Γ coupe (Ox) en un unique point d'abscisse α avec $-1{,}3 < \alpha < -1{,}2$	0,5pt
b) Montrer que la courbe Γ admet un point d'inflexion A et préciser ses coordonnées.	0,25pt
c) Construire (Δ), Γ dans le repère précédent.	0,5pt

Exercice 5 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2(2\ln x - 1) + 1$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ puis interpréter le résultat.	0,75pt
b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement ce résultat.	1,25pt
2° a) Montrer que $f'(x) = 4x\ln x$.	1pt
b) Dresser le tableau de variation de f.	0,5pt
3° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [1,+\infty[$.	
a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.	0,5pt
b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}.	0,5pt
4° Construire (C) et (C') dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, ((C') étant la courbe de g^{-1}).	0,5pt
5° a) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $K = \int_1^e x^2 \ln x dx$.	0,5pt
b) En déduire l'aire A du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.	0,5pt

Fin.

Corrigé du Sujet 6

Exercice 1

Question n°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Réponse	*C*	*B*	*A*	*B*	*C*	*A*

Exercice 2

1. $(4-2i)^2 = 16-16i-4 = 12-16i$

b) $P(2i) = (2i)^3 - (2+2i)(2i)^2 - (2-8i)(2i) + 8 + 4i$

$= -8i + 8 + 8i - 4i - 16 + 8 + 4i = 0$

c) En utilisant tableau de Horner

	1	$-2-2i$	$-2+8i$	$8+4i$
$2i$		$2i$	$-4i$	$-8-4i$
	1	-2	$-2+4i$	0

Alors $a = -2$ et $b = -2+4i$

On obtient $P(z) = (z-2i)\left(z^2 - 2z - 2 + 4i\right)$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2 - 2z - 2 + 4i = 0$.

Pour $z^2 - 2z - 2 + 4i = 0$ on a $\Delta = (-2)^2 - 4(-2+4i) = 4 + 8 - 16i = 12 - 16i = (4-2i)^2$

et les solutions sont : $z' = \dfrac{2+4-2i}{2} = 3 - i$ et $z'' = \dfrac{2-4+2i}{2} = -1 + i$.

Donc l'ensemble de solutions de $P(z) = 0$ est $S = \left\{2i, 3-i,\ -1+i\right\}$.

2. a) Figure 1:

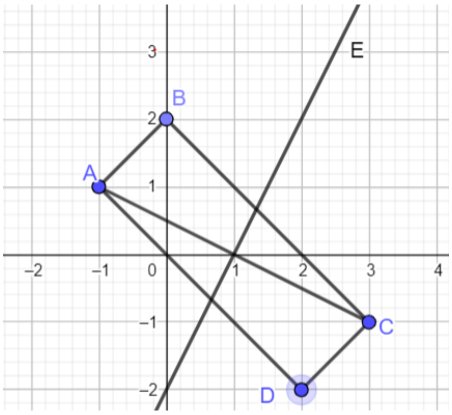


Figure 1

b) ABCD est un parallélogramme si et seulement si les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu ; c-à-d : $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2} \Leftrightarrow z_D = z_A + z_C - z_B = 2-2i$

c) $z_A = -1+i = \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

Donc $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_B = 2i = 2(0+i) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

Donc $z_B = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

d) $\frac{z_C-2i}{z_A-2i}=\frac{3-3i-2i}{-1+i-2i}=\frac{3-3i}{-1-i}=\frac{3i(-i-1)}{(-i-1)}=3i=3(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$

Alors $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=3i$ et $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc le triangle ABC est rectangle en B.

3. a) $M\in E \Leftrightarrow |z-3+i|=|z+1-i| \Leftrightarrow |z-z_C|=|z-z_A| \Leftrightarrow MC = MA$

Donc E est l'ensemble des points équidistants de A et de C ; c'est la médiatrice du segment $[AC]$

Construction de E (cf : figure 1).

b) $M\in F \Leftrightarrow \arg(z-3+i)-\arg(z+1-i)=\frac{\pi}{2}[\pi]$

$$\Leftrightarrow \arg\frac{z-3+i}{z+1-i}=\frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\frac{z-z_C}{z-z_A}=\frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi]$$

Alors l'ensemble F est le cercle de diamètre $[AC]$ privé de A et C.

Exercice 3 :

1. Calcul de la quantité du médicament présente dans le sang du patient

Temps	t=0	t=1 mn	t=2mn

Quantité injectée	**10 ml**	**1 ml**	**1 ml**
Quantité éliminé	**0**	**2 ml**	**1,8 ml**
Quantité présente dans le sang	**10 ml**	**9 ml**	$\boxed{8,2 \text{ ml}}$

Au bout de 2mn la quantité serait 8,2 ml

2. u_n **est la quantité de médicament, en ml, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.**

Au terme de $(n+1)^{ieme}$ **minute 20% de la quantité** u_n **sera éliminée et une quantité de 1ml sera injectée**

D'où : $u_{n+1} = u_n - 20\%u_n + 1 = (1-0,2)u_n + 1$

Soit $\boxed{u_{n+1} = 0,8u_n + 1}$

3. a) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = 0,8u_n + 1 - 5 = 0,8u_n - 4 = 0,8(u_n - 5)$

Donc pour tout entier naturel n non nul,

$v_{n+1} = 0,8 \times v_n$ **, ainsi la suite** (v_n) **est géométrique de raison** $q = 0,8$ **et de premier terme** $v_0 = u_0 - 5 = 5$

b) D'après la question précédente, $\boxed{v_n = 5 \times (0,8)^n}$

Puisque $v_n = u_n - 5$**, on en déduit que** $u_n = v_n + 5 = 5(0,8)^n + 5$

Soit $\boxed{u_n = 5(0,8)^n + 5}$

c) On a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}(5(0,8)^n + 5) = 5$**, car** $\lim\limits_{n\to\infty}(5(0,8)^n) = 0$

Interprétation

Si on continue à administrer ce médicament, une quantité de 5ml reste toujours dans le sang du patient.

Exercice 4 :

1. L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 + 2r + 1 = 0$**, dont la seule solution est** $r_0 = -1$

. Donc la solution générale de (E) est $y(x) = (Ax + B)e^{-x}$**, avec** $A,\ B \in \mathbb{R}$ **.**

2. $\begin{cases} h(0) = -1 \\ h(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A\times 0 + B)e^0 = -1 \\ (-A+B)e^1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -1 \\ -A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A = -1 \end{cases}.$

Donc $\boxed{h(x) = -(x+1)e^{-x}}$

II. $f(x) = -(x+1)e^{-x} - 1$ **..**

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-(x+1)e^{-x}-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-(x+1)}{e^{x}}-1\right)=+\infty$ En effet

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-(x+1)\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x})=0^{+}\end{cases}\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(-(x+1)e^{-x}-1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-(x+1)}{xe^{x}}-\frac{1}{x}\right)=-\infty$, car

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-(x+1)\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{x})=0^{-}\end{cases} \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\ \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$$

Interprétation graphique

La courbe Γ admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $(-\infty)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-(x+1)e^{-x}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{e^{x}}-\frac{-1}{e^{x}}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{\frac{e^{x}}{x}}-\frac{-1}{e^{x}}-1\right)=-1$

Interprétation graphique

La courbe Γ admet une asymptote horizontale (Δ) d'équation $y=-1$ au voisinage de $(+\infty)$.

Pour étudier les positions relatives de Γ et (Δ) on étudie le signe de $f(x)-y=f(x)-(-1)=-(x+1)e^{-x}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f(x)-y		+	0	$-$	
P.R.		$\Gamma/(\Delta)$	$\cap$	$(\Delta)/\Gamma$	

2. a) $f(x)=-(x+1)e^{-x}-1\Rightarrow f'(x)=-e^{-x}+e^{-x}(x+1)$

Alors $\boxed{f'(x)=xe^{-x}}$.

$e^{-x}>0\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

Le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	+	

b) Le tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1

3. a) Sur l'intervalle $I_1 =]-\infty;0]$: f est continue, strictement décroissante de I_1 sur $f(I_1) = J_1 = [-2;+\infty[$ et $0 \in J_1$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans I_1

<u>Sur l'intervalle</u> $I_2 =]0,+\infty[$: f est continue, strictement croissante de I_2 sur $f(I_2) = J_2 = [-2;-1[$ et $0 \notin J_2$ alors d'après le contraposé du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans I_2

En conclusion, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α.

Par conséquent la courbe Γ coupe (Ox) en un unique point d'abscisse α.

$f(-1,2) \approx -0,34$ et $f(-1,3) \approx 0,10$ et comme f est décroissante sur I_1 alors $-1,3 < \alpha < -1,2$

b) Le point d'inflexion de Γ :

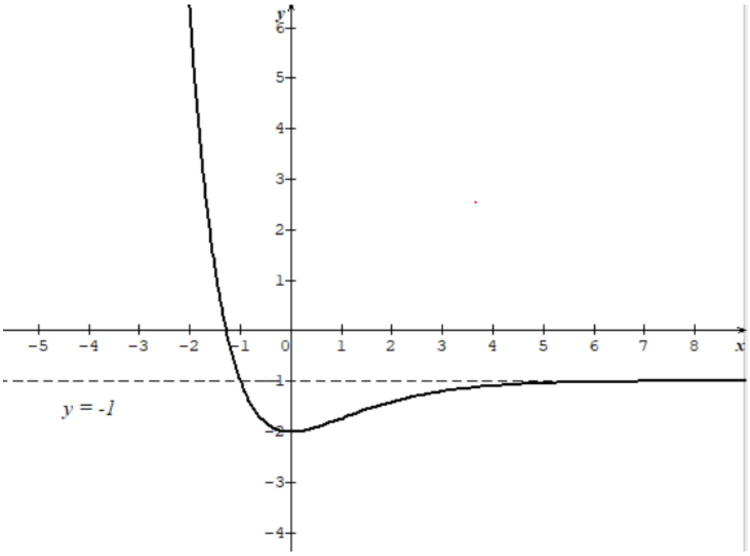
$f'(x) = xe^{-x}$, sa dérivée est : $f''(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (-x+1)e^{-x} \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Signe de f'' :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	

Puisque f'' s'annule et change de signe en $x_0 = 1$ et comme $f(1) = -2e^{-1} - 1$, alors le point $A(1;-2e^{-1} - 1)$ est un point d'inflexion pour Γ.

c) Représentation graphique :



Exercice 5

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f\left(x\right)=x^2(2\ln x-1)+1$

1. a) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2(2\ln x-1)+1)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2x^2\ln x-\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+1$

$=\lim\limits_{x\to 0^+} 2x\times x\ln x+1=1.$

Interprétation : **La fonction f admet un prolongement par continuité en $x_0=1$**

b) Nous avons

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2(2\ln x-1)+1)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\times\lim\limits_{x\to\infty}(2\ln x-1)+1=+\infty$

De mémé $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2(2\ln x-1)+1)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x(2\ln x-1)+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty\times+\infty+0=+\infty$

Interprétation graphique **: la courbe C de la fonction f admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$**

2. a) Pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=(x^2(2\ln x-1)+1)'=2x(2\ln x-1)+x^2\times\dfrac{2}{x}=\boxed{4x\ln x}$

b) les résultats de questions précédentes permettent de dessiner le tableau des variations suivant :

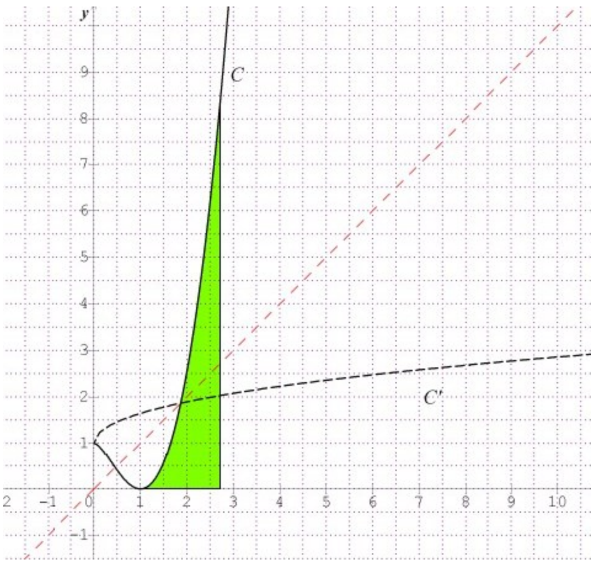
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. La fonction g est continue et strictement croissante (monotone) sur I donc elle réalise une bijection de I dans un intervalle $J=f(I)=[0;+\infty[$.

b) La fonction g^{-1} a le même comportement que g. Elle est donc strictement croissante avec $g^{-1}(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(+\infty)=+\infty$, d'où le tableau de variation suivant

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\left(g^{-1}\right)'(x)$	+
g(x)	0 $\nearrow$ $+\infty$

4. Construction de (C) et (C')



5. a) $K=\int_1^e x^2\ln x\,dx$. On pose $\begin{cases} u(x)=\ln x \\ v'(x)=x^2 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ v(x)=\dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$

D'après les propriétés de l'intégration par partie on a :

$$K=\int_1^e x^2\ln x\,dx=\int_1^e u(x)\times v'(x)dx=\left[uv\right]_1^e-\int_1^e u'(x)\times v(x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e\frac{1}{x}\times x^3dx$$

$$\Rightarrow K=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{9}\left(e^3-1\right)=\boxed{\frac{2e^3+1}{9}}.$$

b) Nous avons :

$$A=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e (x^2(2\ln x-1)+1)dx=2\int_1^e x^2\ln x\,dx-\int_1^e (x^2-1)dx=2K-\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^e$$

$$\Rightarrow A=2\left(\frac{2e^3+1}{9}\right)-\left(\frac{e^3}{3}-e+\frac{2}{3}\right)=\boxed{\frac{e^3+9e-4}{9}u.a}.$$

Sujet 7 Série SN

Exercice1 : (5points)

1° - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz + 2 + 4i = 0$.

2° - On considère le polynôme P définit dans $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - 4iz^2 + (-2+4i)z + 8 - 4i$.

a)Calculer P(2i) et déterminer les complexes a et b tels que: $P(z) = (z-2i)(z^2+az+b)$. (0,5pt)

b)Résoudre, dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z)=0. (0,5pt)

3° - Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A ,B et C les points d'affixes respectives $z_A = (1+i)^2$, $z_B = \frac{7+i}{3+4i}$ et $z_C = \frac{1+7i}{2-i}$.

Donner la forme algébrique de z_A , z_B et z_C . (0,5pt)

Placer les points A , B et C .Déterminer et construire l'affixe du point D tel que ABCD est un parallélogramme. (0,5pt)

4°- Soit f l'application définie pour tout z différent de -1+3i par $f(z) = \frac{(1+i)z-2}{z+1-3i}$,

Montrer que : $f(z) = (1+i)\frac{z-1+i}{z+1-3i}$. (0,5pt)

5°- Déterminer et construire les ensembles de points M d'affixe z dans les cas suivants :

a) Γ_1 tel que $|f(z)| = \sqrt{2}$. (0,5pt)

b) Γ_2 tel que $|f(z) - 1 - i| = 2\sqrt{10}$. (0,5pt)

c) Γ_3 tel que $\arg(f(z)) = \frac{3\pi}{4}$ $[\pi]$. (0,5pt)

6° a) Calculer $\alpha = f(-2)$ et l'écrire sous forme algébrique et trigonométrique. (0,5pt)

Montrer que α^{2018} est imaginaire pur et que α^{2020} est réel négatif . (0,5pt)

Exercice 2 : (3points)

Un établissement de 930 élèves regroupe deux sections : une scientifique et une littéraire.

30% des élèves sont en section scientifique. 40% des élèves sont des garçons et 25% des élèves garçons sont en section scientifique.

1.a) Trouver le nombre des garçons en section scientifique.(0,75pt)

b) Trouver le nombre des filles en section littéraire. (0,75pt)

2.On choisit au hasard un élève de l'établissement.

Quelles sont les probabilités des évènements A , B et C suivants :

A : C'est un garçon de la section scientifique.(0,5pt)

B : sachant que c'est un garçon : c'est un élève de la section scientifique . (0,5pt)

C : sachant que c'est un élève de la section scientifique : c'est un garçon .(0,5pt)

Exercice 3 : (6points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : f(x) = x e^x - e^x + x-1.

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1)a) Calculer et interpréter : $\lim\limits_{x\to-\infty}$ f(x) et $\lim\limits_{x\to-\infty}$ (f (x) –(x-1)). (0,75pt)

b) En remarquant que f(x) = (x-1)(e^x +1) , calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}$ f(x). (0,25pt)

c) Déterminer et interpréter $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. (0,5pt)

2)a) Calculer $f'(x)$ *et* $f''(x)$ (0,5pt) . b) Calculer $f'(-1)$ et préciser son signe (0,5pt).

c) Etudier les variations de $f'(x)$ et en déduire son signe (0,75pt) .

3) Dresser le tableau de variation de f (0,5pt).

4) Déterminer les points d'intersection de C avec les axes de coordonnées et la tracer (1pt).

5) a) vérifier que pour tout x $\in \mathbb{R}$ on a :f(x) = f'(x) - e^x +x -2.En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ (0,5pt) . b) Calculer l'aire S du plan délimité par la courbe C et les axes de coordonnées (0,75pt).

Exercice 4 : (6points)

1) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - lnx$

a) Dresser le tableau de variation de g (0,5pt). b) En déduire que $g(x) \geq \frac{1}{2}$ sur $]0;+\infty[$ (0,25pt).

2) On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{lnx}{x}$ et on note (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

$a)\ Calculer\ \lim\limits_{0^+} f(x)\ et\ \lim\limits_{+\infty} f(x) \quad (0,5pt)$

b) Calculer $f'(x)$ et montrer que :$\forall x > 0$: $f'(x) = \frac{1+g(x)}{x^2}$. (0,5pt)

c)Dresser le tableau de variation de . (0,5pt)

(d) Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α et vérifier que :$\frac{1}{2} < \alpha < 1$. (0,25pt)

3) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$,est une asymptote oblique puis étudier sa position relative par rapport à la courbe (C) . (0,5pt)

Montrer qu'il existe un seul point A où la tangente est parallèle à (D), puis donner l'équation de cette tangente (T). (0,5pt)

4) a) Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}définie sur un intervalle J que l'on déterminera . (0,25pt)

b) Dresser le TV de f^{-1}. (0,25pt) c) Calculer $f^{-1}(\frac{1}{2})$ et $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$. (0,5pt)

5) a) Tracer (C) , (D) , (T)et (C')(la courbe de f^{-1})dans le même repère $(O;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (1pt)

b) Discuter graphiquement suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation : $\frac{lnx}{x} = m$. (0,5pt)

fin.

Corrigé du Sujet 7

Exercice 1

1°) $\Delta = (2i)^2 - 4(2+4i) \Leftrightarrow \Delta = -12-16i = (2-4i)^2$, donc

$z = \dfrac{2i+2-4i}{2} = 1-i$ ou $z = \dfrac{2i-2+4i}{2} = -1+3i$.

2°) a) p(2i) = $(2i)^3 - 4i(2i)^2 + (-2+4i)2i + 8 - 4i = 0$. Déterminons les complexes a et b tels que p(z)= (z-2i)($z^2 + az + b$) , en utilisant le tableau d'Horner , on a :

	1	-4i	-2+4i	8-4i
2i		2i	4	-8+4i
	1	-2i	2+4i	0

Donc a= $-2i$ et b = $2+4i$ et p(z) = $(z-2i)(z^2-2iz+2+4i)$.

b) p(z)=0 $\Leftrightarrow (z-2i)(z^2-2iz+2+4i)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-2i=0 \Leftrightarrow z=2i \\ \text{ou} \\ z^2-2iz+2+4i=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ S= $\{2i, 1-i, -1+3i\}$

3°) a) $z_A = (1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$, $z_B = \dfrac{7+i}{3+4i} \times \dfrac{3-4i}{3-4i} = \dfrac{21-28i+3i+4}{3^2+5^2} = \dfrac{25-25i}{25} = 1-i$

et $z_C = \dfrac{1+7i}{2-i} \times \dfrac{2+i}{2+i} = \dfrac{2+i+14i-7}{2^2+(-1)^2} = \dfrac{-5+15i}{5} = -1+3i$.

b) Placer les points (voir la figure)

c) ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
$z_D - z_A = z_C - z_B \Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A \Leftrightarrow z_D = -2+6i$.

4° f(z) = $(1+i)\dfrac{z - \dfrac{2}{1+i}}{z+1-3i} = (1+i)\dfrac{z - \dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}}{z+1-3i} = (1+i)\dfrac{z-1+i}{z+1-3i}$

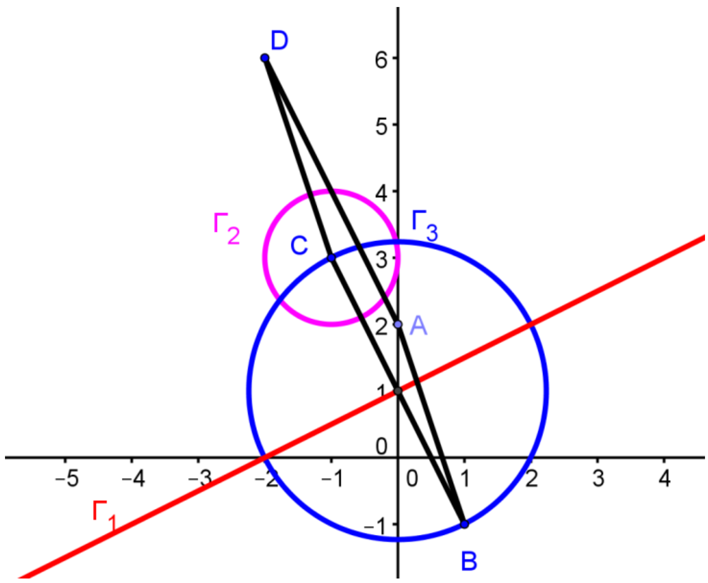
5°) a) $M(z) \in \Gamma_1 \Leftrightarrow |f(z)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |1+i|\left|\dfrac{z-1+i}{z+1-3i}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{MB}{MC} = 1 \Leftrightarrow MB = MC$

donc Γ_1 est la médiatrice du segment $[BC]$.

b) $M(z) \in \Gamma_2$ ssi $|f(z)-(1+i)| = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow \dfrac{|-2+4i|}{MC} = \sqrt{20} \Leftrightarrow MC = 1$, donc Γ_2 est le cercle de C et de rayon 1.

c) $M(z) \in \Gamma_3$ ssi argf(z) = $\dfrac{3\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} + (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{3\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, donc

Γ_3 est le cercle de diamètre $[BC]$ privé de B et C.



Exercice 2

1°) a)Card (G$\cap$ S)= ? on a CardS= $930\times\frac{30}{100}=279$. CardG $=930\times\frac{40}{100}=372$.

Donc Card(G$\cap$S) $=372\times\frac{25}{100}=93$. Il y a 93 garçons scientifiques .

b) Card(F $\cap$ L) = 372. Il y a 372 filles littéraires.

2°) $p(A)=\frac{93}{930}=0{,}1$. $p(B)=p_S(G)=\frac{p(S\cap G)}{p(G)}=0{,}25$. $P(C)=p_S(G)=\frac{p(G\cap S)}{p(S)}=\frac{1}{3}$

.On résume les données dans le tableau suivant :

	Scientifiques	Littéraires	Total
Garçons	93	279	372
Filles	186	372	558
Total	279	651	930

Exercice 3

$f(x)=xe^x-e^x+x-1$.

1°) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x-1))=0$. Donc la droite D d'équation y = x-1 est une asymptote oblique de C en $-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, C admet une B.P de direction (OY) en $+\infty$.

2°) a) $f'(x)=xe^x+1$ et $f''(x)=(x+1)e^x$.

b) $f'(-1)=-e^{-1}+1=\frac{e-1}{e}\succ 0$.

c) les variations de f'(x) :

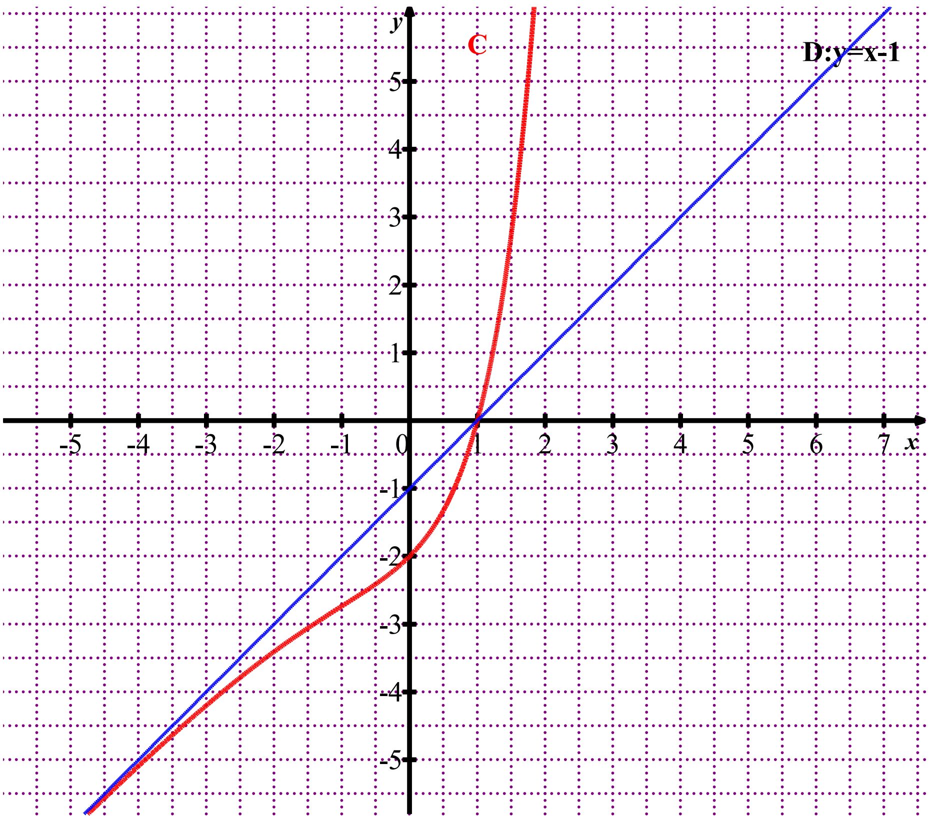
X	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''(x)		$-$	0	$+$	
f'(x)		$\searrow$	$\frac{e-1}{e}$	$\nearrow$	

$\forall x \in \mathbb{R}$, **on a f'(x) $\geq$ f'(-1)= $\frac{e-1}{e} \succ 0$.**

3°) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		$+$	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4°) $C \cap (OY) = \{(0,-2)\}$ et $C \cap (OX) = \{(1,0)\}$.



5°) f(x) = $xe^x - e^x + x - 1$ = = f'(x) - e^x +x-2.

F(x) = f(x) - $e^x + \frac{1}{2}x^2 - 2x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f(x).

b) $\frac{s}{1cm^2} = \int_0^1 -f(x)dx = [F(x)]_1^0 = F(0) - F(1)$ **, donc** $s = \frac{2e-3}{2} cm^2$ **.**

Exercice 4

1) g(x) = $\frac{1}{2}x^2 - \ln x$ **,** $x \in]0,+\infty[$ **.**

a) g'(x) = $x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$1/2$	$\nearrow$	

b) $\forall \ x \in]0,+\infty[$ **, g(x)** $\geq$ **g(1) =** $\frac{1}{2}$ **.**

2) f(x) = $\frac{1}{2}x + \frac{\ln x}{x}, x \in]0,+\infty[$ **.**

a) $\lim\limits_{x \to 0^+}$ **f(x) = -** ∞ **,** $\lim\limits_{x \to +\infty}$ **f(x) = +** ∞ **.**

b) f'(x) = $\frac{1+g(x)}{x^2}$ **.**

c) Tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

d) f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ **vers** $\mathbb{R}$ **car f est continue et strictement croissante , donc l'équation f(x) = 0 admet une unique solution** α **dans** $]0,+\infty[$ **et par le calcul , on a f(** $\frac{1}{2}$ **)** $\times$ **f(1)** $\prec$ **0 donc** $\frac{1}{2} \prec \alpha \prec 1$ **.**

3)a) $\lim\limits_{x \to +\infty}$ **(f(x) -** $\frac{1}{2}$ **x) =** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$ **=0, donc la droite D d'équation y=**$\frac{1}{2}x$ **est une asymptote oblique de (C) en** $+\infty$ **.**

Position relative : f(x) – y = $\frac{\ln x}{x}$ **donc : sur** $]0,1]$ **D est au- dessus de (C) et sur** $[1,+\infty[$ **(C) est au- dessus de D et les deux se coupent au point** $(1,\frac{1}{2})$ **.**

b) f'(x) = $\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ **x=e , d'où le point A** $(e,\frac{e}{2}+\frac{1}{e})$ **. T : y= f'(e)(x-e) +f(e)** $\Leftrightarrow$ **T : y=**$\frac{1}{2}x + \frac{1}{e}$ **.**

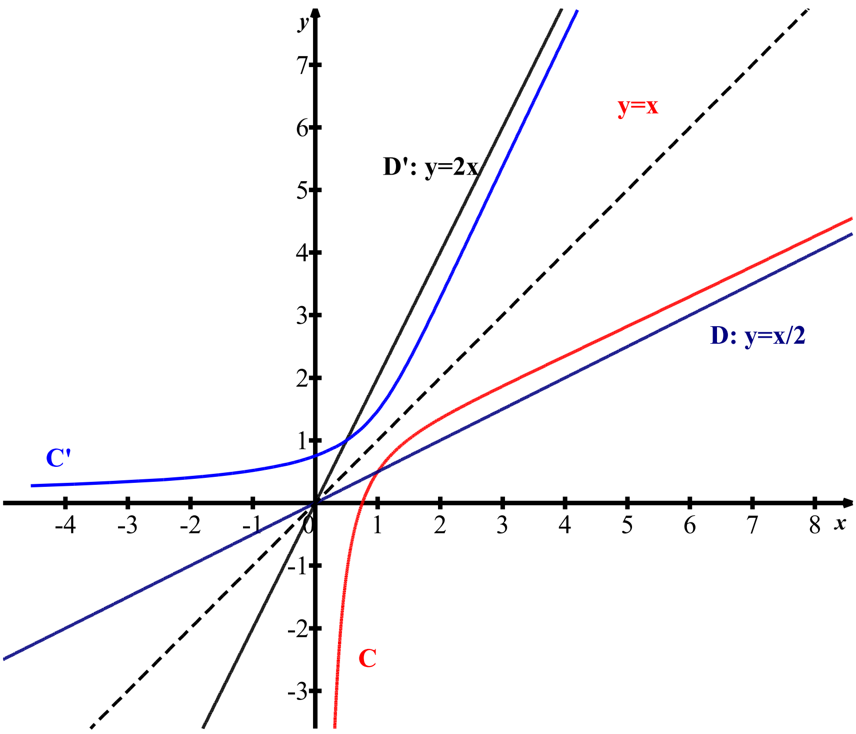
4)a) comme f est bijective de $\left]0,+\infty\right[$ vers $\mathbb{R}$, alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J= $\mathbb{R}$.

b) Tableau de variation de f^{-1} :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$(f^{-1})'(x)$	+
$f^{-1}(x)$	$+\infty$ $\nearrow$ **0**

c) $f^{-1}(\frac{1}{2})=1$ **et** $(f^{-1})'(\frac{1}{2})=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(\frac{1}{2}))}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$.

5) a) Représentation graphique :



b) $\dfrac{\ln x}{x}=m \iff$ **f(x) =** $\dfrac{1}{2}x+m$ **. Les solutions de cette équation sont les abscisses des points d'intersection de (C) avec la droite** D_m **d'équation y =** $\dfrac{1}{2}x+m$ **,** $m\in\mathbb{R}$ **.**

Valeurs de m	$m\leq 0$	**0 < m <** $\frac{1}{e}$	**m =** $\frac{1}{e}$	**m >** $\frac{1}{e}$
Nombre de solutions	**une seule**	**Exactement 2**	**une seule**	**Pas de solution**

Sujet 8 Série SN

Exercice 1 : (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{n+2}{2n+2}u_n + \frac{n}{2n+2}$ et soit $v_n = \frac{u_n - 1}{n+1}$.

Pour chacune des cinq questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La valeur de u_2 est	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{4}$	0,75pt
2	La suite (u_n) est	Positive	Négative	Nulle	0,75pt
3	La valeur de $u_{n+1} - 1$ est	$\frac{(n+2)u_n + n - 1}{2n+2}$	$\frac{(n+2)(u_n - 1)}{2n+2}$	u_n	0,5pt
4	La suite (v_n) est	Géométrique	Arithmétique	Ni arithmétique, ni géométrique	0,5pt
5	Le terme général de (v_n) est	$\frac{1}{2^n}$	$1 + \frac{n}{2}$	$1 + \frac{1}{2^n}$	0,5pt

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée

Question n°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Réponse					

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 3i$, $z_B = 2+2i$ et $z_C = -3-3i$

1° a) Calculer $(2-i)^2$. 1pt

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - (2+5i)z - 6 + 6i = 0$. 1pt

2° a) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres z_B et z_C 0,5pt

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|z - 3i| = |z - 2 - 2i|$. 0,5pt

3° On pose $z_0 = z_C$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, , $z_{n+1} = \frac{1}{3} i z_n + 1 + 3i$ et $d_n = \lvert z_n - z_A \rvert$	**0,5pt**
a) Montrer que $z_1 = z_B$	
b) Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.	
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{z_{n+1} - z_A}{z_n - z_A} = \frac{1}{3} i$ puis en déduire la nature du triangle AM_nM_{n+1}	**0,5pt**
c) Déduire que (d_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.	**0,5pt**
d) Exprimer en fonction de n la somme : $S_n = d_0 + d_1 + d_2 + ... + d_n$	**0,5pt**

Exercice 3 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x^2 + 1 + 2\ln x}{2x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat.	**1pt**
b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et déduire que la courbe (C) admet une asymptote (D) à préciser.	**1pt**
2° a) Montrer que $f'(x) = \frac{-2\ln x}{x^3}$.	**1pt**
b) Dresser le tableau de variation de f.	**0,25pt**
3° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [1,+\infty[$.	
a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.	**0,5pt**
b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}.	**0,5pt**
4°a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}$, une unique solution x_0 et que $0,4 < x_0 < 0,5$.	**0,5pt**
b) Construire (D), (C) et (C'), ((C') étant la courbe représentative de g^{-1}).	**0,5pt**
5° a) Utiliser une intégration par parties pour calculer $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.	**0,5pt**
b) En déduire l'aire A du domaine plan délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.	**0,25pt**

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-4)(e^x-1)$. On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(2x-2)e^x-2$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$	1pt
b) Calculer $h'(x)$ puis dresser le tableau de variation de h.	1pt
c) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et justifier que $1,2<\alpha<1,3$	0,5pt
d) Déterminer le signe de h sur $\mathbb{R}$	0,5pt
2° a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.	0,75pt
b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et que la droite (Δ) d'équation $y=-2x+4$ est une asymptote à Γ. Etudier la position relative entre (Δ) et Γ	0,75pt
3° a) Montrer que $f'(x)=h(x), \forall x\in\mathbb{R}$	0,5pt
b) Dresser le tableau de variation de f.	0,25pt
c) Vérifier que $f(\alpha)=-\frac{2(\alpha-2)^2}{\alpha-1}$	0,25pt
4° a) Déterminer les points d'intersection de Γ avec les axes de coordonnées.	0,25pt
b) Construire (D) et Γ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. (on prendra $\alpha=1.3$)	0,25pt

Fin.

Corrigé du Sujet 8

Exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5
Réponse	C	A	B	A	A

Exercice 2

1. a) $(2-i)^2 = 2^2 + i^2 - 2\times 2\times i \Rightarrow \boxed{(2-i)^2 = 3-4i}$

b) Le discriminant de cette équation est $\Delta = (2+5i)^2 - 4(-6+6i) = 3-4i = (2-i)^2$ alors les solutions de l'équation $z^2-(2+5i)z-6+6i=0$ sont :

$z_1 = \dfrac{(2+5i)+(2-i)}{2} = 2+2i$ et $z_2 = \dfrac{(2+5i)-(2-i)}{2} = 3i$.

L'ensemble des solutions de l'équation $z^2-(2+5i)z-6+6i=0$ est $S=\{2+2i;3i\}$

2. a) $|z_B| = |2+2i| = 2\sqrt{2}$ et si $\arg z_B = \alpha$ alors $\cos\alpha = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\alpha = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

donc $\arg z_B = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

Alors une forme trigonométrique de z_B s'écrit $\boxed{z_B = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

D'autre part $z_C = -3-3i = \dfrac{-3}{2}z_B = \left(\dfrac{3}{2}e^{i\pi}\right)\left(2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 3\sqrt{2}\,e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow z_C = 3\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

D'où une forme trigonométrique de z_C s'écrit $\boxed{z_C = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)}$

b) $|z-3i| = |z-2-2i| \Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow MA=MB$ d'où E est la médiatrice du segment $[AB]$

3. a) $z_1 = \dfrac{1}{3}iz_0 + 1 + 3i = \dfrac{1}{3}i(-3-3i)+1+3i = 2+2i \Rightarrow \boxed{z_1 = z_B}$

b) $\dfrac{z_{n+1}-z_A}{z_n-z_A} = \dfrac{\frac{1}{3}iz_n + 1 + 3i - 3i}{z_n - 3i} = \dfrac{\frac{1}{3}iz_n + 1}{z_n-3i} = \dfrac{\frac{1}{3}i(z_n-3i)}{z_n-3i} \Rightarrow \boxed{\dfrac{z_{n+1}-z_A}{z_n-z_A} = \dfrac{1}{3}i}$.

Donc $\arg\left(\dfrac{z_{n+1}-z_A}{z_n-z_A}\right) = \arg\left(\dfrac{1}{3}i\right) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

On en déduit alors que le triangle AM_nM_{n+1} est rectangle en A (non isocèle car $AM_{n+1} = \dfrac{1}{3}AM_n$).

c) D'après la question précédente on a : $\left|\frac{z_{n+1}-z_A}{z_n-z_A}\right|=\left|\frac{1}{3}i\right| \Rightarrow \frac{|z_{n+1}-z_A|}{|z_n-z_A|}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow |z_{n+1}-z_A|=\frac{1}{3}|z_n-z_A|$ d'où $d_{n+1}=\frac{1}{3}d_n$ donc (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $d_0=|z_0-z_A|=|(-3-3i)-3i|=|-3-6i|=3\sqrt{5}$

d) $S_n=d_0\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=3\sqrt{5}\times\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$ donc $\boxed{S_n=\frac{9\sqrt{5}}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}$

Exercice 3

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{4x^2+1+2\ln x}{2x^2}$

1. a) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{4x^2+1+2\ln x}{2x^2}=-\infty$, en effet :

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(4x^2+1+2\ln x\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}2x^2=0^+$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty}$

Interprétation graphique : la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale de (C)

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2+1+2\ln x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{2x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{2x^2}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)=0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2}$ d'où la droite (D) d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale de (C).

2. a) $f'(x)=\frac{\left(8x+\frac{2}{x}\right)2x^2-4x(4x^2+1+2\ln x)}{4x^4}=\frac{16x^3+4x-16x^3-4x-8x\ln x}{4x^4}=\frac{-2\ln x}{x^3}$

b) $\forall x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{-2\ln x}{x^3}$ alors $f'(x)$ est positive sur $]0;1]$ et négative sur $[1;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2

3. a) Du tableau de variation de f on déduit celui de g.

x	1	$+\infty$
g'	$-$	
g	$\frac{5}{2}$ $\searrow$	2

Alors g est continue et strictement décroissante sur $I=[1,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur l'intervalle $J=f(I)=\left[2;\frac{5}{2}\right[$.

b) La fonction g^{-1} est une bijection de J sur I .
Son tableau de variation se déduit de celui de g.

x	2	$\frac{5}{2}$
$(g^{-1})'$	$-$	
g^{-1}	$+\infty$ $\searrow$	1

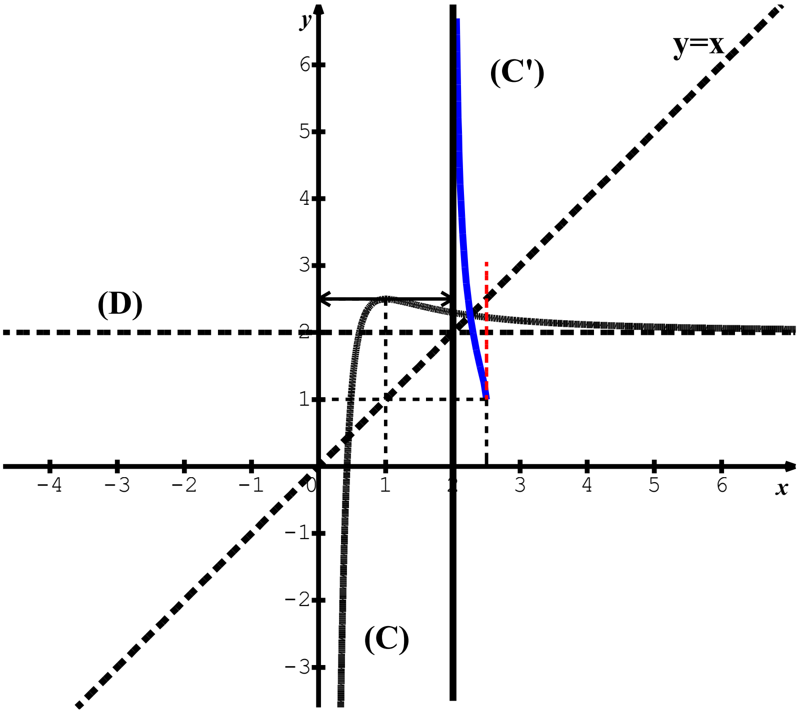
4. a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0;1]$ en plus $0\in f(]0;1])=\left]-\infty;\frac{5}{2}\right]$ alors d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet sur $]0;1]$ une unique solution x_0.

- La fonction f est continue sur $[1;+\infty[$ et $f([1;+\infty[)=\left]2;\frac{5}{2}\right]$ donc elle est strictement positive sur $[1;+\infty[$ d'où, l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur $[1;+\infty[$

Conclusion : l'équation $f(x)=0$ admet sur $]0;+\infty[$ une unique solution x_0

De plus $f(0,4)\approx -0,60$ et $f(0,5)\approx 1,23$. $f(0.4)<f(x_0)<f(0.5)$ et puisque f est croissante sur $[0,4;0,5]$ alors $0.4<x_0<0.5$

b) La construction des courbes



5. a) On pose : $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ **et** $v(x) = \ln x \Rightarrow u(x) = -\frac{1}{x}$ **et** $v'(x) = \frac{1}{x}$.

Par intégration par parties, on obtient :

$$I = \int_1^e u'(x)v(x)dx = [uv]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e - \int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow I == \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e = \left[-\frac{1+\ln x}{x}\right]_1^e = \frac{-2}{e} + 1 = \frac{e-2}{e} \text{ donc } \boxed{I = \frac{e-2}{e}}$$

b) Sur l'intervalle $[1, e]$**, f est continue et sa courbe est située au-dessus de (Ox) donc**

$$A = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{4x^2+1+2\ln x}{2x^2}dx = \int_1^e\left(2+\frac{1}{2x^2}\right)dx + I = \left[2x - \frac{1}{2}\times\frac{1}{x}\right]_1^e + I$$

$$\Rightarrow A = \left(2e - \frac{1}{2e}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{e-2}{e} \Rightarrow \boxed{A = \frac{4e^2 - e - 5}{2e} \text{ ua}}$$

Exercice 4

1. a) Nous avons : $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}(2\cancel{x}e^x - 2\cancel{e}^x - 2) = -2$ **et** $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[(2x-2)e^x - 2\right] = +\infty$

b) $h(x) = (2x-2)e^x - 2 \Rightarrow h'(x) = 2e^x + (2x-2)e^x = 2xe^x$ **donc** $\boxed{h'(x) = 2xe^x}$

d'où le tableau de variation de h

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h'	$-$	0	$+$
h	$-2 \searrow$	-4	$\nearrow +\infty$

c) La fonction h est strictement négative sur $]-\infty;0]$.

Elle est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc réalise une bijection de $[0;+\infty[$ dans l'intervalle $J=[-4;+\infty[$. Or $0\in[-4;+\infty[$ donc $\exists!\alpha[0;+\infty[$ tel que : $h(\alpha)=0$ et puisque $h(1,2)=-0,67$ et $h(1,3)=0,2$, on en déduit que $1,2<\alpha<1,3$.
Donc l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α comprise entre $1,2$ et $1,3$.

d) D'après le résultat de la question précédente, on peut dresser le tableau de signe de h :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$

2. a) Nous avons : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-4)(e^x-1)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-4)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-1)=+\infty$

D'autre part on a :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4}{x}\right)(e^x-1)=+\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4}{x}\right)=2 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}(e^x-1)=+\infty.$$
Donc la courbe Γ possède, en $+\infty$, une branche parabolique de direction (Oy).

b) On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-4)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-1)=-1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.
D'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-4)e^x=0$
Donc la droite (Δ) d'équation $y=-2x+4$ est une asymptote oblique à Γ au voisinage de $-\infty$.

Position relative de Δ et Γ : nous avons $f(x)-y=(2x-4)e^x$ positif si $x\geq 2$ et négatif si non d'où le tableau :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
P.R	Δ/Γ	p c	Γ/Δ

3. a) La fonction f est dérivable et pour tout réel x on a :

$$f'(x)=\left[(2x-4)(e^x-1)\right]'=2(e^x-1)+(2x-4)e^x=2e^x-2+2xe^x-4e^x$$

$$\Rightarrow f'(x)=2xe^x-2e^x-2=(2x-2)e^x-2=h(x).$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}, \boxed{f'(x)=h(x)}$ **.**

b) Les résultats des questions précédentes nous permettent de dresser le tableau de variation de f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

c) Nous avons : $h(\alpha)=0\Leftrightarrow(2\alpha-2)e^{\alpha}-2=0\Leftrightarrow e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$**, en reportant cette valeur dans l'expression de** f **on obtient :**

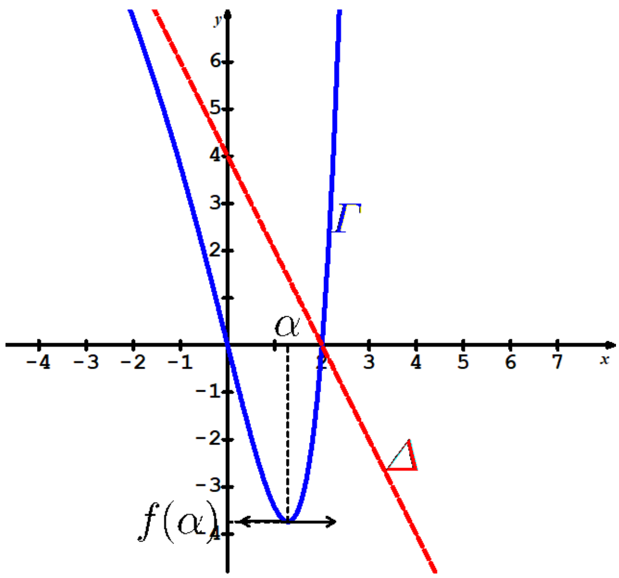
$$f(\alpha)=(2\alpha-4)(e^{\alpha}-1)=(2\alpha-4)\left(\frac{1}{\alpha-1}-1\right)=(2\alpha-4)\left(\frac{2-\alpha}{\alpha-1}\right)\Rightarrow\boxed{f(\alpha)=-\frac{2(\alpha-2)^2}{\alpha-1}}$$

4. a) Nous avons : $f(x)=0\Leftrightarrow(2x-4)(e^x-1)=0$

Soit $2x-4=0\Rightarrow x=2$ **ou bien** $e^x-1=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0$ **donc la courbe** Γ **coupe l'axe des abscisses en deux points : l'origine** O **du repère et le point** $A(2;0)$ **.**

Et puisque $f(0)=0$**, on en déduit aussi que :** $\Gamma\cap(Oy)=O$ **.**

b) Construction de (D) **et** Γ



Sujet 9 Série SN

Exercice 1 (3 points)

Le tableau ci-contre, représente la répartition selon le sexe d'un échantillon de 1000 individus d'une population dont le taux de vaccination contre la rougeole est estimé à 40%. On choisit un individu au hasard et on considère les événements suivants :

A « l'individu choisi est vacciné » ;

B « l'individu choisi est un homme » et

C « l'individu choisi est une femme vaccinée »

	Vacciné	Non vacciné	Total
Homme	200	400	600
Femme	300	100	400
Total	500	500	1000

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La probabilité $P(A)$ est	$0,5$	$0,3$	$0,2$	0,5pt
2	La probabilité $P(C)$ est	$0,25$	$0,3$	$0,1$	0,5pt
3	La probabilité $P_A(\overline{B})$ est	$\frac{17}{29}$	$\frac{21}{29}$	$\frac{23}{29}$	0,5pt
4	L'intervalle de fluctuation asymptotique est	$[0.37;0.43]$	$[0.45;0.53]$	$[0.45;0.52]$	0,5pt
5	L'intervalle confiance est	$[0.2;0.3]$	$[0.46;0.53]$	$[0.42;0.55]$	0,5pt
6	L'estimation des vaccinés est	Acceptée au seuil de 95%	Rejetée avec une erreur de 5%	Rejetée au seuil de 95%	0,5pt

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée

Question n°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Réponse						

Exercice 2 (4 points)

On considère le polynôme P défini pour tout nombre complexe z par :

$P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + (3-15i)z - 36$.

1° a) Donner les racines carrées de $50i$ 0,25pt

b) Calculer $P(3i)$ et déterminer les complexes a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, 0,5pt

$P(z) = (z-3i)(z^2 + az + b)$

c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$. 0,5pt

2° Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

a) Placer les points A, B et C d'affixes : $z_A=3i$, $z_B=2+2i$ et $z_C=-3-3i$. 0,5pt

b) Déterminer la nature du triangle ABC. 0,25pt

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. 0.25pt

3° Pour tout nombre complexe, $z\neq 2+2i$ on pose : $f(z)=\dfrac{z-3i}{z-2-2i}$

a) Déterminer les ensembles des points M d'affixe z dans les cas suivants :

$\Gamma_1:|f(z)|=1$, $\Gamma_2:f(z)$ est imaginaire pur et $\Gamma_3:|f(z)-1|=1$ 0.75pt

b) Vérifier que A appartient Γ_3 et construire Γ_1 ; Γ_2 et Γ_3. 0.5pt

4° Pour tout entier n on donne les points M_n d'affixe z_n tel que : $z_n=(\frac{z_B}{2})^{2n}$

a) $M_n\in(Ox)$; b) $M_n\in(Oy)$; c) $OM_n\geq 2024$ 0.5pt

Exercice 3 (4 points)

Un traitement consiste à administrer à un patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.

la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ème heure. On a donc $u_0=2$.

On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé. On estime que lorsqu'une heure s'est

écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection. On désigne par u_n

la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ème heure. On a donc $u_0=2$.

1°Calculer la quantité u_1 de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure. 0.5pt

2° Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}=0.7u_n+1.8$ 0.5pt

3°a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \le u_{n+1} \le 6$ **0.5pt**

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite. **0.5pt**

c) Déterminer la valeur de ℓ et l'interpréter dans le contexte de l'exercice. **0.5pt**

2° On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = 6 - u_n$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
Préciser sa raison et son premier terme. **0.5pt**

b) Déterminer l'expression de v_n et celle de u_n en fonction de n. **0.5pt**

c) On arrête le traitement si la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg. Déterminer, le nombre d'injections nécessaire pour pouvoir arrêter le traitement. **0.5pt**

Exercice 4 (5points)

Soient f et g deux fonctions définies sur IR par : $f(x) = (e^{2-x} + 1)x$ et $g(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}$ et soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormé.

1°On donne les équations différentielles : $y'' + 2y' + y = x + 2$ (E) et $y'' + 2y' + y = 0$ (E').

a) Donner la solution générale de (E') et vérifier que $u(x) = x$ est une solution de (E) **0.5pt**

b) En déduire la solution h de (E) vérifiant h(2)=4 et h'(2)=0. **0.5pt**

2°Dresser le tableau de variation de g en déduire son signe. **0.5pt**

3°a) Calculer les limites : $\lim\limits_{+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{+\infty}(f(x) - x)$; $\lim\limits_{-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{-\infty} \frac{f(x)}{x}$ **0.75pt**

Interpréter ces limites

b) Etudier la position relative de (C) par rapport à la droite $\Delta : y = x$ **0.25pt**

4°a) Démontrer que $f'(x) = g(x)$ et monter que le point $I(2\,;4)$ est un point d'inflexion. **0.5pt**

b) Dresser le tableau de variation de f et montrer que f admet une réciproque f^{-1} **0.5pt**

c) Donner l'équation de la tangente T à (C) au point I et calculer

$$\lim_{x \to 4} \frac{f^{-1}(x) - 2}{x - 4}$$ **0.5pt**

d) Tracer T ; (C) et (C') où (C') est la courbe de f^{-1}. **0.5pt**

5) Soit λ un réel positif ; on pose $A(\lambda)$ l'aire du domaine plan délimité par (C) ; (Δ) et les droites : $x=0$ et $x=\lambda$.

a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties : $I=\int_0^{\lambda} xe^{2-x}dx$ — 0.25pt

b) Calculer $A(\lambda)$ et déterminer $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$. — 0.25pt

Exercice 5 (4points)

1°Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I=]-1;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$$

a) Dresser le tableau de variation de la fonction g. — 0.5pt

b) Calculer g (0). Montrer que l'équation g (x) = 0 admet une solutions unique $\alpha\neq 0$. — 0.5pt

c) Vérifier que $-0.72\leq\alpha\leq-0.71$ et donner le signe de g (x), pour $x\in I$ — 0.5pt

2°Soit f la fonction définie sur l'ensemble $I=]-1;0[\cup]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$$ — 0.5pt

a) Calculer $\lim_{0^+} f(x)$ $\lim_{0^-} f(x)$; puis interpréter. — 0.5pt

(On rappelle que $\lim_{0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$)

b) Calculer $\lim_{1^+} f(x)$ et $\lim_{+\infty} f(x)$ puis interpréter. — 0.25pt

c) Montrer que $f(\alpha)=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ — 0.25pt

d) Montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ en déduire son signe et dresser le tableau de variation de f. — 0.5pt

3° Représenter graphiquement f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. — 0.5pt

Fin.

Corrigé du Sujet 9

Exercice 1

Recopier et compléter le tableau en choisissant la bonne réponse

$$p(A)=\frac{500}{1000}=0.5\ ;\ p(B)=\frac{600}{1000}=0.6\ ;p(\overline{B})=\frac{400}{1000}=0.4\ ;\ p(C)=\frac{300}{1000}=0.3$$

$$p(\overline{B}\cap A)=\frac{300}{1000}=p(C)=0.3\ ;\ p_A(\overline{B})=\frac{p(\overline{B}\cap A)}{p(A)}=\frac{0.3}{0.5}=0.6.$$

$$\text{Pour les intervalles on a : } p=40\%=0.4 \text{ et } f=\frac{500}{1000}=0.5$$

$$\text{Intervalle de fluctuation : } I_F=\left[0.4-1.96\frac{\sqrt{0.4\times0.6}}{\sqrt{1000}};0.4+1.96\frac{\sqrt{0.4\times0.6}}{\sqrt{1000}}\right]=\left[0.37;0.43\right]$$

$$\text{Intervalle de confiance : } I_C=\left[0.5-\frac{1}{\sqrt{1000}};0.5-\frac{1}{\sqrt{1000}}\right]=\left[0.46;0.53\right]$$

$\Rightarrow f\notin I_F \Rightarrow$ L'hypothése p de la propotion de 40% des vaccinées est rejétée au seuil de 95%.

1	2	3	4	5	6
A	B	C	A	B	C

Exercice 2

1) $P(z)=z^3+(1-2i)z^2+(3-15i)z-36$

a) Vérifier que $P\left(3i\right)=0$ puis déterminer b et c tels que : $P(z)=(z-3i)(z^2+bz+c)$

b) Résoudre l'équation $P\left(z\right)=0$.

a) $P(3i)=(3i)^3+(1-2i)(3i)^2+(3-15i)(3i)-36=$

$-27i-9+18i+9i+45-36=45-45-27i+27i=0\Rightarrow P(3i)=0$

D'où le tableau de Horner :

	1	$1-2i$	$3-15i$	-36
$3i$		$3i$	$-3+3i$	36
	1	$1+i$	$-12i$	0

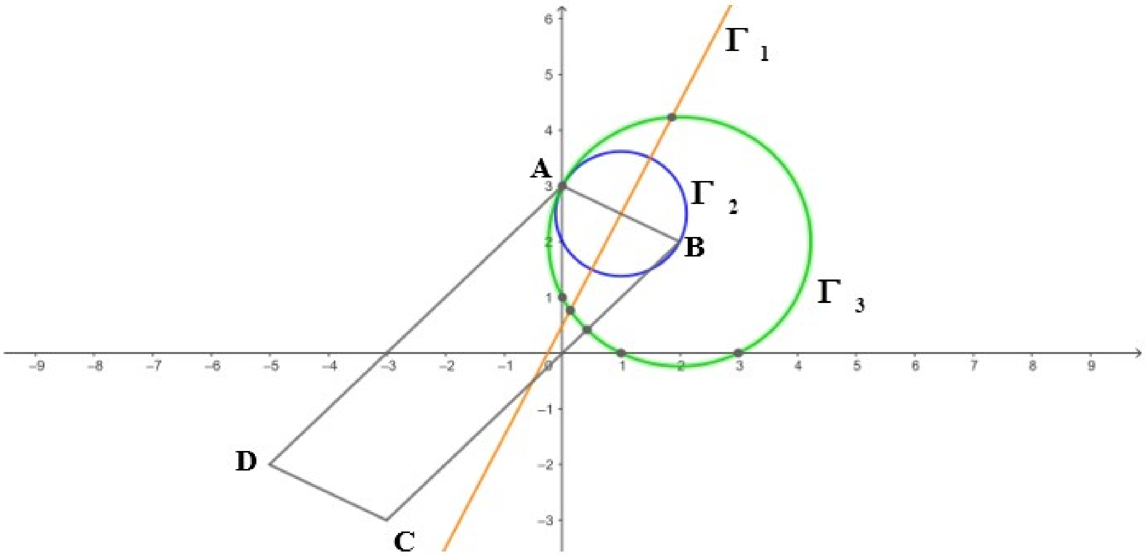
$P(z)=(z-3i)(z^2+(1+i)z-12i)=0\Rightarrow z=3i$ ou $z^2+(1+i)z-12i=0$

$$\Rightarrow \Delta=2i+48i=25(1+i)^2\Rightarrow z_1=\frac{-1-i+5+5i}{2}=2+2i$$

$$\text{et } z_1=\frac{-1-i-5-5i}{2}=-3-3i \text{ Ainsi : } S=\left\{3i;2+2i;-3-3i\right\}$$

2) $z_A = 3i$; $z_B = 2+2i$ et $z_C = -3-3i$

a) Placer les points A ; B et C et et écrire sous forme trigonométrique z_B et z_C .



$$\begin{cases} z_B = 2+2i \\ z_B = -3-3i \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} |z_B| = 2\sqrt{2} \\ \cos\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4} \\ \cos\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} |z_C| = 3\sqrt{2} \\ \cos\theta = \dfrac{-3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \dfrac{5\pi}{4} \\ \cos\theta = \dfrac{-3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

$$z_B = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \ ; \ z_C = 3\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$$

2)b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c)Trouver l'affixe du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

b) $\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \dfrac{3i-2-2i}{3i+3+3i} = \dfrac{-2+i}{3+6i} = \dfrac{-2+i}{3+6i} \times \dfrac{i}{i} = \dfrac{i(-2+i)}{3(i-2)} = \dfrac{1}{3} i \Rightarrow \arg\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow$

$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow$ ABC est un triangle rectangle en A.

c) ABCD est un parallèlogramme si : $z_B + z_D = z_A + z_C \Rightarrow$

$z_D = z_C + z_A - z_B = -3-3i+3i-2-2i = -5-2i \Rightarrow z_D = -5-2i$

3)a Pour tout nombre complexe, $z \neq 2+2i$ **on pose :** $f(z) = \dfrac{z-3i}{z-2-2i}$

a) Déterminer les ensembles des points M d'affixe z dans les cas suivants :

$\Gamma_1 : |f(z)| = 1$; Γ_2 : f(z) est imaginaire pur ; $\Gamma_3 : |f(z) - 1| = 1$

$$f(z) = \frac{z-3i}{z-2-2i} = \frac{z-z_A}{z-z_B} \Rightarrow |f(z)| = \frac{MA}{MB} \ ; \ Arg(f(z)) = (\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA})$$

$$\text{et } f(z)-1 = \frac{z-z_A}{z-z_B} - 1 = \frac{z-z_A-z+z_B}{z-z_B} = \frac{-3i+2+2i}{z-z_B} = \frac{2-i}{z-z_B}$$

$$\Gamma_1 : |f(z)| = 1 \Rightarrow \frac{MA}{MB} = 1 \Rightarrow \Gamma_1 = med[AB] \ ;$$

$$\Gamma_2 : f(z) \in i\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f(z) = 0 \\ Arg(f(z)) = \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = z_A \\ (\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$$

donc Γ_2 est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B $\Rightarrow \Gamma_2 = C_{[AB]} \setminus \{B\}$

$$\Gamma_3 : |f(z)-1| = \left|\frac{2-i}{z-z_B}\right| = 1 \Rightarrow BM = \sqrt{5} \Rightarrow \Gamma_3 \text{ est le cercle de centre B est de rayon } \sqrt{5}$$

3)b) Vérifier que $A \in \Gamma_3$ et construire ces trois ensembles

$$f(z_A) = \frac{z_A - z_A}{z_A - z_B} = 0 \Rightarrow |f(z_A) - 1| = 1 \Rightarrow A \in \Gamma_3 ; \text{Construction : voir figure}$$

4) Déterminer les entiers naturels n dans les cas :

a) $M_n \in (Ox)$; b) $M_n \in (Oy)$; c) $OM_n \geq 2024$

$$a) M_n \in (Ox) \Rightarrow Arg(z_n) = k\pi \Rightarrow 2nArg(\frac{z_B}{2}) = 2nArg(1+i)$$

$$a) M_n \in (Ox) \Rightarrow Arg(z_n) = k\pi \Rightarrow 2nArg(\frac{z_B}{2}) = k\pi \Rightarrow n = 2k \Rightarrow n \text{ est pair}$$

$$b) M_n \in (Oy) \Rightarrow Arg(z_n) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow n\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow n = 2k+1 \Rightarrow n \text{ est impair.}$$

$$c)\left|z_n\right|=\left|\frac{z_B}{2}\right|^{2n}=\left[\sqrt{2}\right]^{2n}=OM_n \text{ et } OM_n \geq 2024 \Rightarrow \left[\sqrt{2}\right]^{2n} \geq 2024 \Rightarrow$$

$$2n\ln(\sqrt{2}) \geq \ln 2024 \Rightarrow n \geq \frac{\ln 2024}{2\ln(\sqrt{2})} \Rightarrow n \geq 10.9 \Rightarrow n \geq 11 \Rightarrow$$

les entiers n tels que $OM_n \geq 2024$ sont les entiers superieurs ou égaux à 11.

$$c)\left|z_n\right|=\left|\frac{z_B}{2}\right|^{2n}=\left[\sqrt{2}\right]^{2n}=OM_n \text{ et } OM_n \geq 2024 \Rightarrow \left[\sqrt{2}\right]^{2n} \geq 2024 \Rightarrow$$

$$2n\ln(\sqrt{2}) \geq \ln 2024 \Rightarrow n \geq \frac{\ln 2024}{2\ln(\sqrt{2})} \Rightarrow n \geq 10.9 \Rightarrow n \geq 11 \Rightarrow$$

les entiers n tels que $OM_n \geq 2024$ sont les entiers superieurs ou égaux à 11.

Exercice 3

1) Calculer la quantité u_1 de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure

$$u_0 = 2 \Rightarrow u_1 = u_0 - \frac{30}{100}u_0 + 1.8 = 2 - 0.6 + 1.8 = 3.2 \Rightarrow u_1 = 3.2$$

2) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0.7u_n + 1.8$

A l'heure n la quantité de médicament est u_n et à l'heure suivante (n+1)

la quantité est u_{n+1} :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{30}{100}u_n + 1.8 = 0.7u_n + 1.8$$

3)a) Montrer par récurrence que, pour tout a entier naturel n on a : $u_n \leq u_{n+1} \leq 6$

b) En déduire que u_n est convergente. On note ℓ sa limite.

c) Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice

a)On a : $u_0 = 2$ et $u_1 = 3.2 \Rightarrow u_0 \leq u_1 \leq 6 \Rightarrow$ vrai pour $n = 0$;
supposons que : $u_n \leq u_{n+1} \leq 6$ et montrons que : $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6$;

si $u_n \leq u_{n+1} \leq 6 \Rightarrow 0.7u_n + 1.8 \leq 0.7u_{n+1} + 1.8 \leq 0.7 \times 6 + 1.8 \Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6$

$\Rightarrow \forall n : u_n \leq u_{n+1} \leq 6$

b)On a : $u_n \leq u_{n+1} \leq 6 \Rightarrow u_n$ et est croissante et est majorée $\Rightarrow (u_n)$ est convergente

c) ℓ=0.7 ℓ+1.8 donc 10ℓ=7ℓ+18 d'où ℓ=6

Cette limite signifie que la plus grande quantité de médicament qui peut rester dans le sang du patient ne dépasse pas 6 mg.

4)a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.

$$4a) v_n = 6 - u_n \Rightarrow v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - 0.7u_n - 1.8 \Rightarrow v_{n+1} = 4.2 - 0.7u_n =$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = 0.7(6 - u_n) = 0.7v_n$$

Donc v_n est une suite géométrique de raison q = 0.7 et de premier terme $v_0 = 6 - 2 = 4$

$$v_n = v_0 \times q^n = 4 \times (0.7)^n \text{ et } v_n = 6 - u_n \Rightarrow u_n = 6 - v_n = 6 - 4 \times (0.7)^n$$

Donc : $v_n = 4 \times (0.7)^n$ et $u_n = 6 - 4 \times (0.7)^n$

c) On arrête le traitement si la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg. Déterminer le nombre d'injections nécessaire pour pouvoir arrêter le traitement.

On arrête le traitement si

$$u_n \geq 5.5 \Rightarrow 6 - 4 \times (0.7)^n \geq 5.5 \Rightarrow -4 \times (0.7)^n \geq -0.5 \Rightarrow (0.7)^n \leq 0.125$$

$$\Rightarrow n \ln(0.7) \leq \ln(0.125) \Rightarrow n \geq \frac{\ln(0.125)}{\ln(0.7)} \Rightarrow n \geq 5.83 \Rightarrow n \geq 6$$

Au bout de six injections la quantité de médicament dévient supérieure à 5.5 mg

Exercice 4

1) On donne les équations différentielles : $y'' + 2y' + y = x + 2$ (E) ; $y'' + 2y' + y = 0$ (E').

a) Donner la solution générale de (E') et vérifier que $u(x) = x$ est solution de (E)

b) En déduire la solution h de (E) vérifiant h(2)=4 et h'(2)=0.

$$a) y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r+1)^2 = 0 \Rightarrow r = -1$$

donc la solution generale est $y(x) = (Ax + B)e^{-x}$

$u(x)=x; u'(x)=1; u''(x)=0$ et u vérifie (E) si :

$u''+2u'+1=x+2 \Rightarrow 0+2+x=x+2 \Rightarrow u$ vérifie (E)

L'équation avec second membre a pour solution : $h(x)=y(x)+u(x) \Rightarrow$

$h(x)=(Ax+B)e^{-x}+x \Rightarrow h'(x)=(-Ax-B+A)e^{-x}+1$ et $h(2)=4 \Rightarrow$

$$(-A-B)e^{-2}=-1 \Rightarrow \begin{cases}(2A+B)e^{-2}=2\\(-A-B)e^{-2}=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(2A+B)=2e^{2}\\(A+B)=e^{2}\end{cases} \Rightarrow$$

$(2A+B)e^{-2}+2=4$ et $h'(2)=0 \Rightarrow (-2A-B+A)e^{-2}+1=0 \Rightarrow$

$A=e^{2}$ et $B=0 \Rightarrow h(x)=e^{2}xe^{-x}+x \Rightarrow h(x)=x(e^{2-x}+1)$

D2) Dresser le tableau de variation de $g(x)=1+(1-x)e^{2-x}$ **et en déduire son signe**

$g(x)=1+(1-x)e^{2-x} \Rightarrow g'(x)=-e^{2-x}-(1-x)e^{2-x}=(x-2)e^{2-x}$; $\lim\limits_{-\infty} g(x)=+\infty$;

$\lim\limits_{+\infty} g(x)=\lim\limits_{+\infty}\left[e^{2}\left(\frac{1}{e^{x}}-\frac{x}{e^{x}}\right)+1\right]=1; g(2)=0$. **D'où le TV de g et le signe de g**

x	$-\infty$		2		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g(x)	$+\infty$	↘	0	↗	1

g a pour minimum 0 donc $g(x)\geq 0$

d'où le tableau de signe de g

x	$-\infty$		2		$+\infty$
g(x)		+	0	+	

3)a) Calculer et interpréter les limites : $\lim\limits_{-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{-\infty}\frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{+\infty}(f(x)-x)$

b) Etudier la position relative de (C) et $\Delta : y=x$.

a) $\lim\limits_{-\infty} f(x)=\lim\limits_{-\infty}(e^{2-x}+1)x=-\infty$; $\lim\limits_{-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{-\infty}(e^{2-x}+1)=+\infty \Rightarrow$

(C) a une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

$\lim\limits_{+\infty} f(x)=\lim\limits_{+\infty}(e^{2-x}+1)x=\lim\limits_{+\infty}(e^{2}\frac{x}{e^{x}}+x)=+\infty; \lim\limits_{+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{+\infty} e^{2}\frac{x}{e^{x}}=0$

$\Rightarrow y=x$ **est une asymptote oblique à (C) en** $+\infty$.

b) Position relative de (C) et

$\Delta : y = x \ f(x) - y = xe^{2-x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$
PR	Δ / C	$\cap$	C / Δ

4) a) Démontrer que $f'(x) = g(x)$ et monter que le p point $I(2;4)$ est un point d'inflexion.

b) Dresser le tableau de variation de f et montrer que f admet une réciproque f^{-1}

c) Donner l'équation de la tangente T à (C) en I et calculer $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f^{-1}(x) - 2}{x - 4}$ Interpréter

$$4)a) f(x) = (e^{2-x} + 1)x \Rightarrow f'(x) = (e^{2-x} + 1) - xe^{2-x} = 1 + (1 - x)e^{2-x} = g(x)$$

qui s'annule en 2 avec et ne change pas de signe d'après 2)

et $f(2) = 4$ donc $I(2;4)$ est un point d'inflexion.

b) Tableau de variation de f

$f'(x) = g(x)$ donc f' et g ont même signe d'où le TV de f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	4	↗ $+\infty$

$$b) f \text{ est bijective (contin croissante) sur } \mathbb{R} \text{ donc } f \text{ admet une réciproque } f^{-1}$$

$$c) \text{Tangente en } 2 : \ f'(2) = 0 \Rightarrow y = f(2) \Rightarrow T : y = 4$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{f^{-1}(x) - 2}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(4)}{x - 4} ; \text{ on pose } \Rightarrow \ t = f^{-1}(x)$$

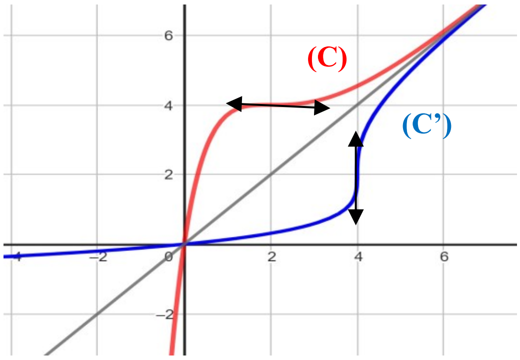
$$\Rightarrow \begin{cases} f(2) = 4 \Leftrightarrow f^{-1}(4) = 2 \\ x \to 4 \Leftrightarrow t \to 2 \\ f'(x) \geq 0 \text{ et } f'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 4} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(4)}{x - 4} = \lim_{t \to 2} \frac{t - 2}{f(t) - f(2)}$$

$$\text{et comme } \begin{cases} f'(t) \geq 0 \text{ et } f'(2) = 0 \\ \lim\limits_{t \to 2} \dfrac{f(t) - f(2)}{t - 2} = 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{t \to 2} \frac{t - 2}{f(t) - f(2)} = +\infty \ \Rightarrow \lim_{x \to 4} \frac{f^{-1}(x) - 2}{x - 4} = +\infty$$

donc f^{-1} n'est pas dérivable en 4 et sa courbe admet une tangente verticale en $x_0 = 4$ d'équation $x = 4$.

d) Tracer T ; (C) et (C') où (C') est la courbe de f^{-1}.

Les éléments intervenant dans le tracé sont : la tangente horizontale en I (point d'inflexion) qui traverse la courbe ; l'asymptote oblique $y = x$ en $+\infty$ qui est aussi l'axe de symétrie etle point O qui est l'intersection avec les axes et une branche parabolique suivant (Oy) en $-\infty$



5) a) Soit λ un réel positif ; on pose $A(\lambda)$ l'aire délimité par (C) ; Δ et les droites : $x = 0$ et $x = \lambda$

b) Calculer à l'aide d'une intégration par parties $I = \int_0^{\lambda} xe^{2-x}dx$ c) Calculer $A(\lambda)$ et déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

$$5)a)I = \int_0^{\lambda} xe^{2-x}dx \rightarrow \left| \begin{array}{l} u = x ; u' = 1 \\ v' = e^{2-x} ; v = -e^{2-x} \end{array} \right. \Rightarrow I = \left[-xe^{2-x}\right]_0^{\lambda} + \int_0^{\lambda} e^{2-x}dx$$

$$= \left[-xe^{2-x}\right]_0^{\lambda} - \left[e^{2-x}\right]_0^{\lambda} = \left[(x+1)e^{2-x}\right]_{\lambda}^{0} = e^2 - (\lambda+1)e^{2-\lambda} \Rightarrow I = e^2 - (\lambda+1)e^{2-\lambda}$$

$$b)\ A(\lambda) = \int_0^{\lambda} (f(x) - x)dx = \int_0^{\lambda} xe^{2-x}dx = I \Rightarrow \ A(\lambda) = e^2 - (\lambda+1)e^{2-\lambda}$$

$$\lim_{+\infty} A(\lambda) = \lim_{+\infty}(e^2 - \frac{\lambda}{e^{\lambda}} - \frac{1)}{e^{\lambda}}e^2 = e^2$$

Exercice 5

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I = \left]-1;+\infty\right[$ par : $g(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$

a) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

b) Calculer g (0). Montrer que l'équation g (x) = 0 admet une solutions unique $\alpha \neq 0$.

c) Vérifier que $-0.72 \le \alpha \le -0.71$ et donner le signe de g (x), pour x appartenant à I

a) $g(x) = \dfrac{x}{x+1} - 2\ln(x+1) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{-2x-1}{(x+1)^2}$ et $g(\dfrac{-1}{2}) = -1 + 2\ln 2$

$\lim\limits_{+\infty}\left[\dfrac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)\right] = -\infty$ et $\lim\limits_{-1^+} g(x) = \lim\limits_{-1^+} \dfrac{x - 2(x+1)\ln(x+1)}{x+1} = -\infty$ d'où le TV de g

x	-1		-0.5		$+\infty$
g'(x)	||	+	0	-	
g(x)	|| $-\infty$	↗	$-1+2ln2$	↘	$+\infty$

$g(0) = 0 + \ln 1 = 0$ et g réalise deux bicjections respectivement sur $\left]-1\,;-0.5\right]$

et $\left[-0.5;+\infty\right[$ vers $\left]-\infty\,;\,-1+2\ln 2\right]$ qui contient 0 donc l'équation $g(x) = 0$

admet exactement 2 solutions dont l'une est 0; notons l'autre α.

Vérifions que : $-0.72 \le \alpha \le -0.71$; $g(-0.72) = -0.025 \le 0$ et $g(-0.71) = 0.027xe^x + 1 - e^x + x - 2$
≥ 0

D'où $-0.72 \le \alpha \le -0.71$ On en déduit le signe de g dans le tableau ci − dessous

x	-1		α		0		$+\infty$
g(x)	||	-	|	+	|	-	

2) a) Calculer $\lim\limits_{0^+} f(x)$; $\lim\limits_{0^-} f(x)$ puis interpréter.

b) Calculer $\lim\limits_{-1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x)$ puis interpréter.

2)a) $\lim\limits_{0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} \dfrac{\ln(x+1)}{x^2} = \lim\limits_{0^+} \dfrac{\ln(x+1)}{x} \times \dfrac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{0^-} f(x) = \lim\limits_{0^-} \dfrac{\ln(x+1)}{x^2} = \lim\limits_{0^-} \dfrac{\ln(x+1)}{x} \times \dfrac{1}{x} = -\infty$ alors la droite $x = 0$ est une AV à (C_f).

b) $\lim\limits_{-1^+} f(x) = \lim\limits_{-1^+} \dfrac{\ln(x+1)}{x^2} = -\infty \Rightarrow$ la droite $x = 1$ est une AV à (C_f).

c) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$.

d)Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ et en déduire son signe et dresser le tableau de variation de f.

2)c) On a : $g(\alpha)=\dfrac{\alpha}{\alpha+1}-2\ln(\alpha+1)=0 \Rightarrow \ln(\alpha+1)=\dfrac{\alpha}{2(\alpha+1)} \Rightarrow$

$f(\alpha)=\dfrac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2}=\dfrac{\alpha}{2(\alpha+1)}\times\dfrac{1}{\alpha^2} \Rightarrow f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$ et comme $\alpha \approx -0.715 \Rightarrow$

$f(\alpha)=\dfrac{1}{2(-0.715)(-0.715+1)} \Rightarrow f(\alpha)\approx 2.45$

d) $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\dfrac{x^2}{x+1}-2x\ln(x+1)}{x^4}=\dfrac{x\left[\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)\right]}{x^4}$

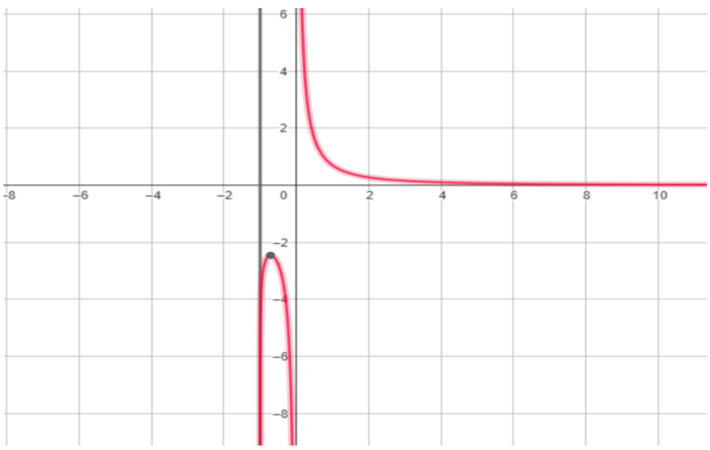
$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{\left[\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)\right]}{x^3}=\dfrac{g(x)}{x^3}$ d'où le signe de f' et le TV de f .

signe de f'

x	-1		α		0		+∞
g(x)	‖	--	0	+	‖	--	
x	‖	--		--	‖	+	
f'(x)	‖	+	0	--	‖	--	

x	-1		α		0		+∞
f'(x)	‖	+	0	--	‖	--	
f(x)	‖ -∞	↗	f(α)	↘	-∞ ‖ +∞	↘	0

3) Courbe de f



Sujet 10 Série SN

Exercice 1 : (3 points)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel non nul n par : $u_n = \dfrac{n}{2n^2+n}$ et $v_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on donne $x_n = \dfrac{1}{u_n}$ et $y_n = \ln(v_n)$.

Pour chacune des six questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La valeur de x_5 est	6	11	16	0.5pt
2	La limite de la suite (u_n) est	0	$\dfrac{1}{2}$	1	0.5pt
3	La suite (v_n) est une suite	Croissante	Décroissante	Non monotone	0.5pt
4	La suite (x_n) est une suite	Arithmétique	Géométrique	Convergente	0.5pt
5	Le terme général de la suite (y_n) est	$y_n = \dfrac{1}{3}\ln n$	$y_n = -n\ln 3$	$y_n = n\ln 3$	0.5pt
6	La somme $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ est égale à	$\dfrac{1}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$	$\dfrac{1}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}\right)$	$\dfrac{1}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$	0.5pt

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée

Question n°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Réponse						

Exercice 2 : (6 points)

1° Pour tout complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (7+7i)z^2 + (-2+30i)z + 32 - 16i$

a) Calculer $P(2i)$ **0.5pt**

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout z, on a : $P(z) = (z-2i)(z^2+az+b)$ **0.5pt**

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$ **0.5pt**

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 3+i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 4+4i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$	1pt
b) Déterminer la nature du triangle ABC	0.5pt
c) Déterminer l'affixe z_D du point D tel que ABDC soit un parallélogramme. Placer D.	0.5pt
3° Pour tout nombre complexe $z \neq 3+i$; on pose : $f(z)=\dfrac{z-2i}{z-4-4i}$.	
a) Vérifier que $f(z_D)=-i$ et interpréter graphiquement.	0.5pt
b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $\lvert f(z)\rvert=1$	0.5pt
c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que $\lvert f(z)-1\rvert=\sqrt{2}$	0.5pt
4° On pose $z_0=f(6)$ et pour tout entier naturel n on note $z_n=z_0^n$	
a) Ecrire z_0 sous forme algébrique, puis vérifier que $z_0=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.	0.5pt
b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $\lvert z_n\rvert \geq 2020$.	0.25pt
c) Vérifier que le point d'affixe z_{2020} appartient à l'axe des abscisses.	0.25pt

Exercice 3 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-2+e^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x-2))=0$	0.5 pt
b) En déduire que la droite (Δ) d'équation $y=x-2$ est asymptote à la courbe (C) puis étudier leur position relative.	0.75pt
2° a) Montre que $f(x)=\dfrac{xe^x-2e^x+1}{e^x}$ et que $\dfrac{f(x)}{x}=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{xe^x}$	0.5 pt
b) En déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$. Interpréter graphiquement	0.75pt
3° Justifier que $f'(x)=1-e^{-x}$ et dresser le tableau de variation de f .	0.5 pt
4° a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions α et β avec $\beta<\alpha$ puis vérifier que $1,8<\alpha<1,9$.	0.5 pt
b) Justifier que $f'(\alpha)=\alpha-1$	0.25pt

5° Construire la courbe (C) et son asymptote (Δ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.	0.25pt

Exercice 4 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x-x\ln x & \forall x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et en déduire que f est continue en 0^+.	0.75pt
b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et interpréter graphiquement.	0.5pt
c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ puis interpréter graphiquement.	1 pt
2° Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.	1 pt
3° a) Déterminer les points d'intersection de la courbe (Γ) avec l'axe des abscisses.	1pt
b) Donner une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse e.	0.5pt
4° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=[1,+\infty[$.	
a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.	0.5pt
b) Montrer que $\left(g^{-1}\right)'(0)=-1$ où g^{-1} est la réciproque de g.	0.5pt
c) Construire (T), (Γ) et (Γ') dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, (Γ') étant la courbe représentative de g^{-1}.	0.5pt
d) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $2x-x\ln x=m$	0.25pt
5° a) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $A=\int_1^e x\ln x\,dx$.	0.25pt
b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.	0.25pt

Fin

Corrigé du Sujet 10

Exercice 1

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	B	A	B	A	B	B

Exercice 2

1° Pour tout nombre complexe z :

$$P(z)=z^3-(7+7i)z^2+(-2+30i)z+32-16i$$

a) Calcul de $P(2i)$

$$P(2i)=(2i)^3-(7+7i)(2i)^2+(-2+30i)(2i)+32-16i$$

$$\Rightarrow P(2i)=-8i+28+28i-4i-60+32-16i=0$$

$$\Rightarrow \boxed{P(2i)=0}$$

c)Factorisation de P :

Utilisons le tableau de Horner

	1	-7-7i	-2+30i	32-16i
2i		2i	10-14i	-32+16i
	1	-7-5i	8+16i	0

Donc $a=-7-5i$ **et** $b=8+16i$.

Pour tout nombre complexe z : $P(z)=(z-2i)\left(z^2-(7+5i)z+8+16i\right)$

La division euclidienne peut être également utilisée :

$$\begin{array}{l|l}
z^3-(7+7i)z^2+(-2+30i)z+32-16i & z-2i \\
\hline
-z^3+2iz^2 & z^2-(7+5i)z+8+16i \\
=\boxed{-(7+5i)z^2+(-2+30i)z+32-16i} & \\
-(7+5i)z^2+(10-14i)z & \\
=\boxed{(8+16i)z+32-16i} & \\
-(8+16i)z+32-16i & \\
\boxed{0} &
\end{array}$$

On peut aussi utiliser l'identification :

$$P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)\qquad =z^3+(a-2i)z^2+(b-2ai)z-2bi$$

Par identification $\begin{cases} a-2i=-7-7i \\ b-2ai=-2+30i \\ -2bi=32-16i \end{cases}$ **d'où** $\begin{cases} a=-7-5i \\ b=8+16i \end{cases}$

d) Résolution, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $P(z)=0$:

$P(z)=0 \Leftrightarrow (z-2i)\left(z^2-(7+5i)z+8+16i\right)=0$

$\Leftrightarrow z-2i=0$ ou $z^2-(7+5i)z+8+16i=0$

- $z-2i=0 \Leftrightarrow z=2i$
- pour $z^2-(7+5i)z+8+16i=0$, on a $\Delta=(-(7+5i))^2-4\times1\times(8+16i)=-8+6i$ qu'on peut écrire $\Delta=1+2\times1\times3i+(3i)^2=(1+3i)^2$.

Donc $1+3i$ est une racine carrée de Δ

Autre méthode :

Le nombre complexe $z=x+iy$ est une racine carrée de $-8+6i$ ssi $z^2=-8+6i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=|-8+6i| \\ x^2-y^2=-8 \\ 2xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10 & (1) \\ x^2-y^2=-8 & (2) \\ xy=3 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow 2x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm1$

Pour $x=1$, on a $1\times y=3$ donc $y=3$ alors $1+3i$ est une racine carrée de $-8+6i$

D'où les solutions de l'équation $z^2-(7+5i)z+8+16i=0$ sont:

$$z'=\frac{7+5i+(1+3i)}{2\times1}=4+4i \quad z''=\frac{7+5i-(1+3i)}{2\times1}=3+i$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$ est $\{2i;4+4i;3+i\}$

2° a) Représentation des points A, B et C (Cf figure 1)

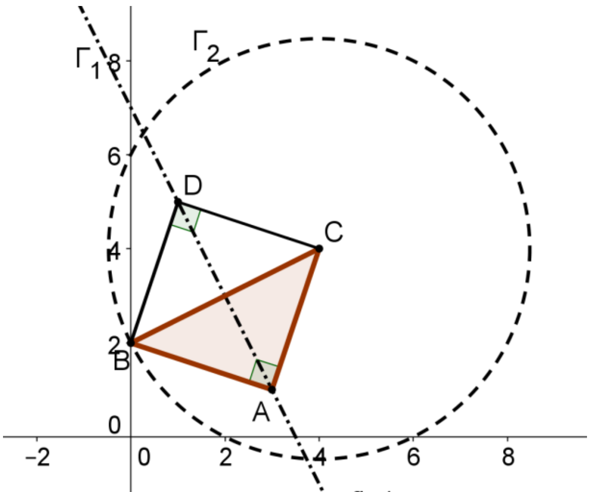


fig1

b) La nature du triangle ABC $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\dfrac{2i-(3+i)}{4+4i-(3+i)}=\dfrac{-3+i}{1+3i}=\dfrac{i(3i+1)}{1+3i}=-i$

Donc le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

<u>Autre méthode</u>

$AB=|z_B-z_A|=|2i-3-i|=|-3+i|=\sqrt{10}$

$AC = |z_C - z_A| = |4+4i-3-i| = |1+3i| = \sqrt{10}$

$CB = |z_B - z_C| = |2i-4-4i| = |-4-2i| = \sqrt{20}$

Alors $AB = AC$ et $AB^2 + AC^2 = CB^2$ Donc le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

c) Calcul de l'affixe de D :

ABDC est un parallélogramme si et seulement si : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{CD}} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_D - z_C \Leftrightarrow z_D = z_B + z_C - z_A = 2i + 4 + 4i - 3 - i = 1 + 5i$

Donc $\boxed{z_D = 1 + 5i}$

On peut aussi utiliser le fait que ABDC est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu ; c-à-d :

$$\frac{z_A + z_D}{2} = \frac{z_B + z_C}{2} \Leftrightarrow z_D = z_B + z_C - z_A = 1 + 5i$$

On peut aussi utiliser la propriété du 4e sommet du parallélogramme : ABDC est un parallélogramme ssi $z_C = z_A - z_B + z_D \Rightarrow z_D = -z_A + z_B + z_C$

3° Pour tout nombre $z \neq 4 + 4i$, $f(z) = \dfrac{z - 2i}{z - 4 - 4i}$.

a) $f(z_D) = \dfrac{z_D - 2i}{z_D - 4 - 4i} = \dfrac{1 + 5i - 2i}{1 + 5i - 4 - 4i} = \dfrac{1 + 3i}{-3 + i} = \dfrac{-i(i - 3)}{-3 + i} \Rightarrow f(z_D) = -i$

Interprétation graphique :

$f(z_D) = \dfrac{z_D - 2i}{z_D - (4 + 4i)} = \dfrac{z_D - z_B}{z_D - z_C} = -i$ **$\Rightarrow$ le triangle DBC est rectangle isocèle en D.**

b) Nature et construction de Γ_1

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow |f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z_M - z_B}{z_M - z_C}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{BM}{CM} = 1 \Leftrightarrow BM = CM$$

Donc Γ_1 est l'ensemble des points équidistants de B et C ; c'est la médiatrice du segment $[CB]$ or $\text{med}[CB] = (AD)$, d'où Γ_1 $\boxed{\text{est la droite (AD)}}$.

<u>Construction de</u> Γ_1 (cf : figure 1).

b) Nature et construction de Γ_2

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow |f(z) - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{z - 2i}{z - 4 - 4i} - 1\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{z - 2i - z + 4 + 4i}{z - i}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{4 + 2i}{z_M - z_C}\right| = \sqrt{2}$$

D'où $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{20}}{CM} = \sqrt{2} \Leftrightarrow CM = \sqrt{10}$.

Donc Γ_3 est le cercle de centre C et de rayon $\sqrt{10}$, or $AC = \sqrt{10}$ donc

Γ_2 $\boxed{\text{est le cercle de centre C passant par B}}$.

Construction de Γ_2 (cf : figure 1).

4° $z_0 = f(6)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $z_n = (z_0)^n$.

a) Ecriture algébrique de z_0 $z_0 = f(6) = \frac{6-2i}{6-4-4i} = \frac{6-2i}{2-4i} = \frac{6-2i}{2-4i} \times \frac{2+4i}{2+4i} = \frac{20+20i}{20}$

$\Rightarrow \boxed{z_0 = 1+i}$

Forme exponentielle de z_0

$|z_0| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ donc $z_0 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

b) La plus petite valeur de n telle que $|z_n| \geq 2020$:

$$\begin{aligned}
|z_n| \geq 2020 &\Leftrightarrow |z_0|^n \geq 2020 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}^n \geq 2020 \\
&\Leftrightarrow \ln\sqrt{2}^n \geq \ln 2020 \\
&\Leftrightarrow n\ln\sqrt{2} \geq \ln 2020 \\
&\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 2020}{\ln\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow n \approx 21{,}9
\end{aligned}$$

Alors La plus petite valeur de n telle que $|z_n| \geq 2020$ est $n = 22$.

c) Montrons que le point d'affixe z_{2020} appartient à l'axe d'abscisses

Pour cela il suffit de montrer qu'il existe un entier relatif k tel que $\arg(z_{2020}) = k\pi$, or

$\arg z_{2020} = \arg(z_0)^{2020} = 2020\arg(z_0) = 2020 \times \frac{\pi}{4} = 505\pi$.

Donc le point d'affixe z_{2020} appartient à l'axe d'abscisses

Exercice 3 :

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x-2+e^{-x}$.

1° a) Calcul de limites e f :

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0 \end{cases}$ Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-2)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[x-2+\frac{1}{e^x}-x+2\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$$

b) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-2)\right) = 0$ alors la droite (Δ) d'équation $y = x-2$ est une asymptote oblique de (C) en $+\infty$

Comme $f(x)-(x-2) = e^{-x} > 0$ alors la courbe de f est au-dessus de son asymptote (Δ).

2° a) $f(x)=x-2+\frac{1}{e^x}=\frac{(x-2)e^x+1}{e^x}=\frac{xe^x-2e^x+1}{e^x}$ **et** $\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x}\left(x-2+\frac{1}{e^x}\right)=1-\frac{2}{x}+\frac{1}{xe^x}$

b) Calcul de limites :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{xe^x-2e^x+1}{e^x}=+\infty$ **en effet puisque** $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$ **alors** $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x-2e^x+1)=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{xe^x}\right)=-\infty$ **car**

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0^- \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^x}=-\infty\end{cases}$$

Interprétation graphique : (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (Oy)

3° la dérivée de f : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x)=1-0+\left(-e^{-x}\right)=1-e^{-x}$

Et puis que $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}=1 \Leftrightarrow -x=0 \Leftrightarrow x=0$

Donc le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

4° a) Solution de l'équation $f(x)=0$ **:**

– Sur $]-\infty;0[$ f est continue, strictement décroissante et change de signe alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β sur $]-\infty;0[$.

–Sur $]0,+\infty[$ f est continue, strictement croissante et change de signe alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0,+\infty[$.

Puisque $f(1.8)\approx-0.07$ **et** $f(1.9)\approx 0.04$ **alors**

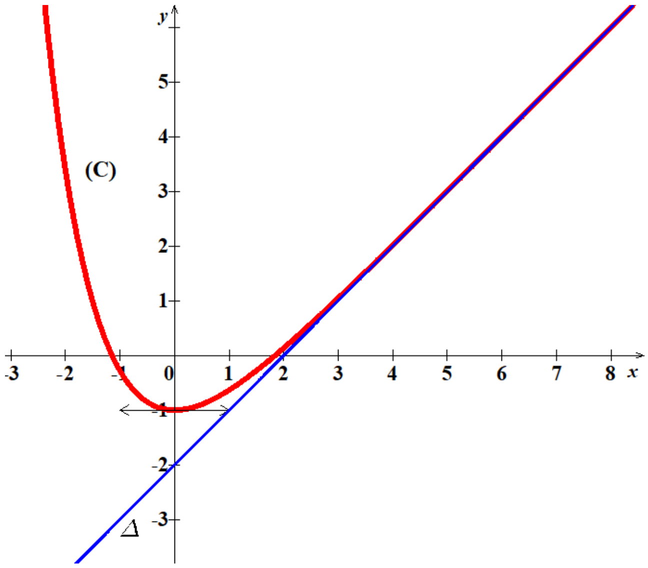
$f(1.8)\times f(1.9)<0$ **alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a** $1.8\le\alpha\le1.9$

b) Valeur de $f'(\alpha)$ **: on a** $f'(\alpha)=1-e^{-\alpha}$

Or $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha-2+e^{-\alpha}=0 \Leftrightarrow e^{-\alpha}=-\alpha+2$

Donc $f'(\alpha)=1-(-\alpha+2)=\alpha-1$

5° Construction de (C) et (Δ) :



Exercice 4 :

$$\begin{cases} f(x) = x - x\ln x & \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1° a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ **car** $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ **et** $\lim\limits_{x \to 0^+} (x\ln x) = 0$

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ **alors f est continue à droite de 0**

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - x\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - \ln x) = +\infty$

Interprétation graphique :

La courbe (Γ) admet à droite du point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale

c) Calcul de limites

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - x\ln x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x(1 - \ln x)\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - x\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \ln x\right) = -\infty$$

Interprétation graphique : la courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$

2° Calcul de $f'(x)$ et tableau de variation de f :

La fonction f, étant la somme et le produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, elle est alors dérivable sur cet intervalle, et $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = 1 - \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = -\ln x$

Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
f'	$\|$	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

3° a) Les points d'intersection de (Γ) avec (Ox) :

Puis que $f(0) = 0$, la courbe (Γ) passe par O(0 ;0)

Pour $x > 0$, $x - x\ln x = 0 \Leftrightarrow x(1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

Alors les points d'intersection de (Γ) avec (Ox) sont ceux de coordonnées $(0;0)$ et $(e;0)$

b) Equation de la tangente (Γ) en $x_0 = e$:

$y = f'(e)(x-e) + f(e)$ **or** $\begin{cases} f'(e) = -1 \\ f(e) = 0 \end{cases}$ **d'où l'équation de (T) est** $y = -x + e$

4° g est la restriction de f sur $I = [1;+\infty[$

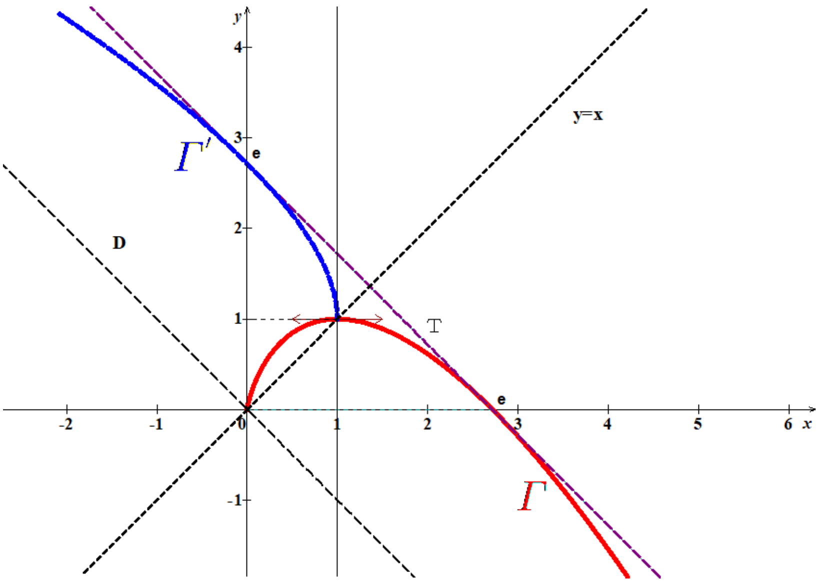
a) Tableau de variation de g :

x	1		$+\infty$
g'		$-$	
g	1	$\searrow$	$-\infty$

f étant continue et strictement décroissante sur $I = [1;+\infty[$ alors sa restriction g réalise une bijection de I sur son image $J =]-\infty;1]$.

b) $\left(g^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{g'\left(g^{-1}(0)\right)} = \dfrac{1}{g'(e)} = \dfrac{1}{-1} = -1$

c) Représentation graphique :



d) Discussion graphique :

$2x - x\ln x = m \Leftrightarrow x - x\ln x = -x + m \Leftrightarrow f(x) = -x + m$ Pour tout réel m, le nombre de solutions de cette équation est celui des points d'intersections de (Γ) avec la droite D_m d'équation $y = -x + m$ qui est parallèle à T et à la droite D d'équation $y = -x$

Nous pouvons donc établir le tableau suivant :

Valeur de m	$m < 0$	$0 \le m < e$	$m = e$	$m > e$
Position relative	D / D_m	$D_m = D$ ou $T / D_m / D$	$D_m = T$	D_m / T
Nombre de solutions	1	2	1	0

5° a) Calcul de l'intégrale $A=\int_1^e x\ln x dx$:

On pose : $\begin{cases} u'(x)=x \\ v(x)=\ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x)=\dfrac{x^2}{2} \\ v'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$

Par intégration par parties, on obtient :

$$A=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{x}{2}dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}-0\right)-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{A=\frac{e^2+1}{4}}$$

b. Calcul de l'aire

Nous savons que, dans l'intervalle $[1;e]$, la courbe (Γ) est située au-dessus de (Ox). D'où l'aire S du domaine plan délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$ est égale à :

$$S=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e (x-x\ln x)dx=\int_1^e xdx-\int_1^e x\ln xdx$$

$$\Rightarrow S=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e-A=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}-\frac{e^2+1}{4}=\frac{e^2-3}{4}.$$

D'où $\boxed{S=\dfrac{e^2-3}{4}}$.